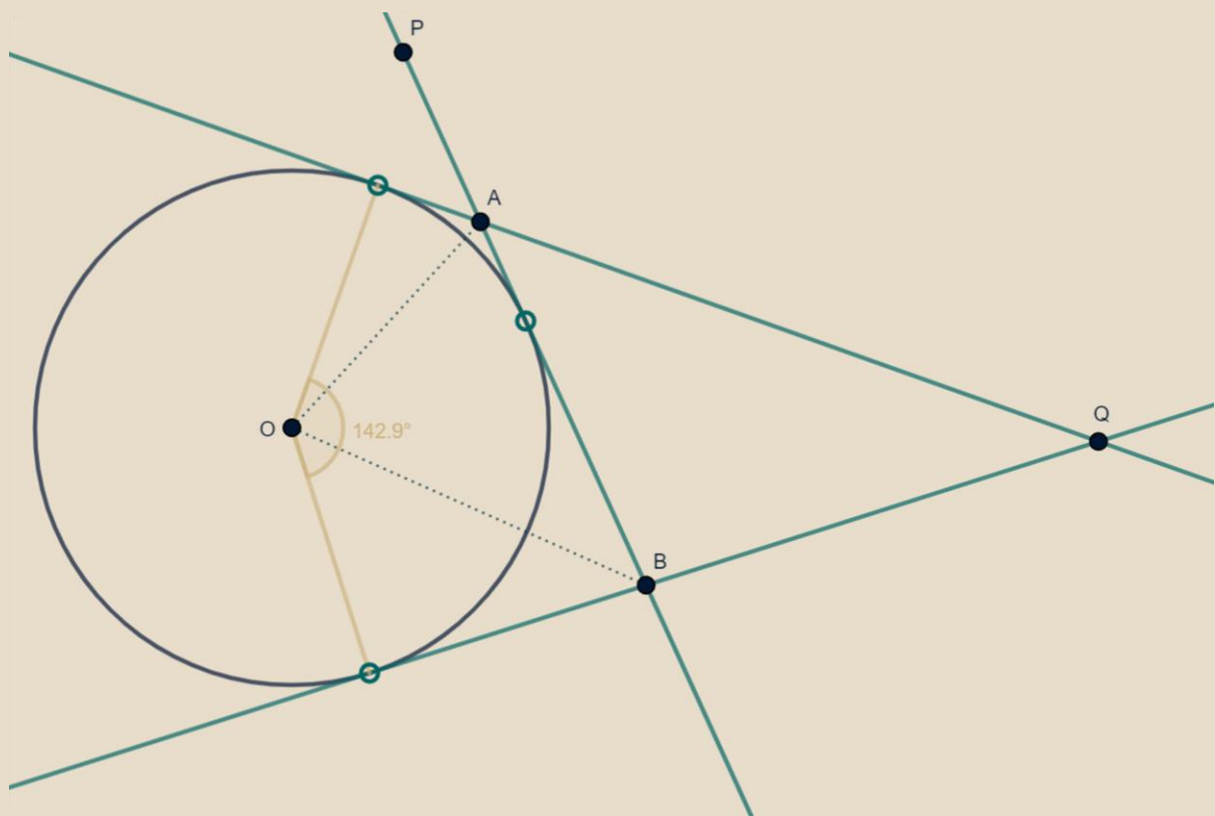


# På opdagelse med GeoGebra





Er din institution udpeget til Copydan-registrering - husk da venligst at indberette materialet.

Du skal indberette hvis du:

- Fotokopierer hele eller dele af materialet.
- Printer hele eller dele af materialet.
- Scanner en papirudgave til pdf- eller andet filformat.
- Uploader, downloader, gemmer og deler materialet på skolens intranet, på din læringsplatform eller på platforme som Google Drev, Dropbox og OneNote.
- Viser materialet på interaktive tavler, fx Smartboards.
- Copy-paster uddrag og sætter ind i dit eget materiale, fx i PowerPoints.

Se hvordan du indberetter på [www.tekstognode.dk](http://www.tekstognode.dk)

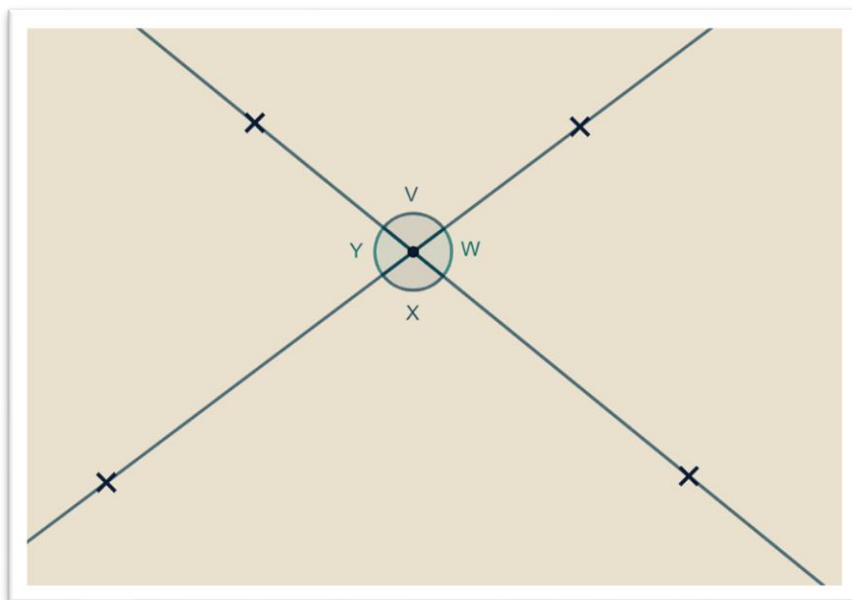
På forhånd tak og god fornøjelse med materialet.

# Indhold

Topvinkler .....	4
Ens.vin v/ par.lin .....	5
En delt ret vinkel .....	6
En delt lige vinkel .....	7
Normaler .....	8
Højder i en trekant .....	9
Midtnormaler .....	10
Midtnormaler i en trekant .....	11
Trekantens omskrevne cirkel .....	12
vinkelhalveringslinjer .....	13
Trekantens indskrevne cirkel .....	14
Medianer .....	15
Del med median .....	16
Forholdet mellem medianer .....	17
vinkel i en cirkel .....	18
vinkel i en halvcirkel .....	19
To korder .....	20
Fire cirkelbuer .....	21
To cirkler skærer hinanden .....	22
Periferivinkler .....	23
Indvendige vinkler .....	24
Udvendige vinkler .....	25
Tangentvinkler .....	26
Korde-tangentvinkler .....	27
De tre tangenter .....	28
De to øjne .....	29
(vinkler(Firkant(Cirkel))) .....	30
Aubels sætning .....	31
Napoleons sætning .....	32
van Schootens sætning .....	33
Vivianis sætning .....	34
Johnsons sætning .....	35
Fermats punkt .....	36
Euler .....	37

Hvorfor så firkantet? .....	38
Dragen i kvadratet .....	39
Andel af kvadrat .....	40
Cirklen på kvadratet .....	41
De kvarte cirkler .....	42
Et kvadrat og to cirkler .....	43
Areal af cirklen .....	44
Morleys trekant .....	45
Forhold mellem cirkler .....	46
Cirkelbuer i kvadrat .....	47
Linjestykke mellem cirkelbuer .....	48
Hvilken figur? .....	49
Tre kongruente rektangler .....	50
Sandkassen .....	51
Firkanten i kvadratet .....	52
Figuren i kvadratet .....	53
Retvinklet trapez .....	54
To midtpunkter .....	55
Et punkt i et kvadrat .....	56
Regulær heksagon .....	57
Rektanglet .....	58
Cirkelblomsten .....	59
Cairo-flisen .....	60
Hexagon Box .....	61
Quiz #1 .....	62
Quiz #2 .....	63

# Topvinkler



Tegn to linjer der skærer hinanden.



Mål vinklerne,  $v$ ,  $w$ ,  $x$  og  $y$ .

Træk i de fire punkter. Hvad opdager du om vinklerne  $v$ ,  $w$ ,  $x$  og  $y$ ?

---

---

---

---

---

---

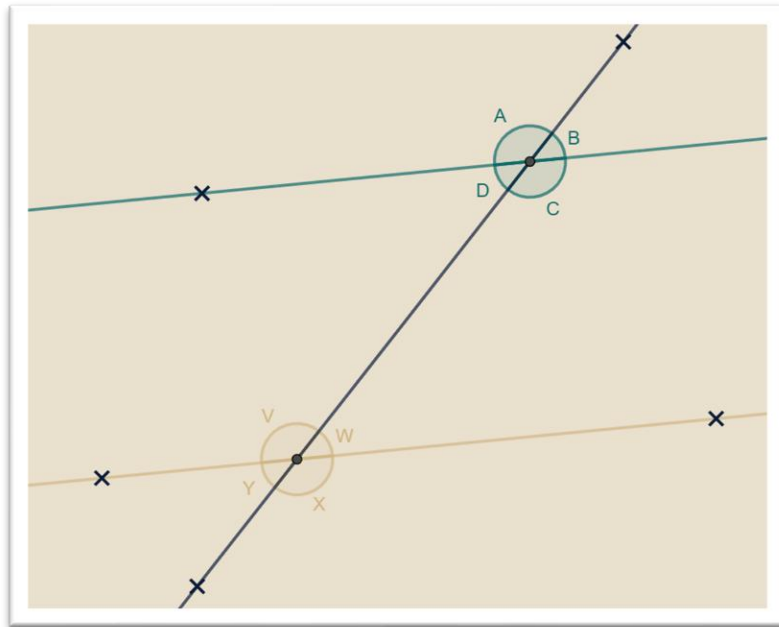
---

---

---

---

# Ens.vin v/ par.lin



Tegn en linje.



Tegn en linje der er parallel med den første linje.



Tegn en linje der skærer de to parallelle linjer.



Mål de otte vinkler.

Træk i punkterne. Hvad opdager du om vinklerne A, B, C, D, V, W, X og Y?

---

---

---

---

# En delt ret vinkel



Åbn arbejdsarket på [kortlink.dk/266cc](https://kortlink.dk/266cc)

Den grønne linje deler en ret vinkel i to mindre vinkler.

Flyt på skyderen. Hvad opdager du om de to vinkler?

---

---

---

---

---

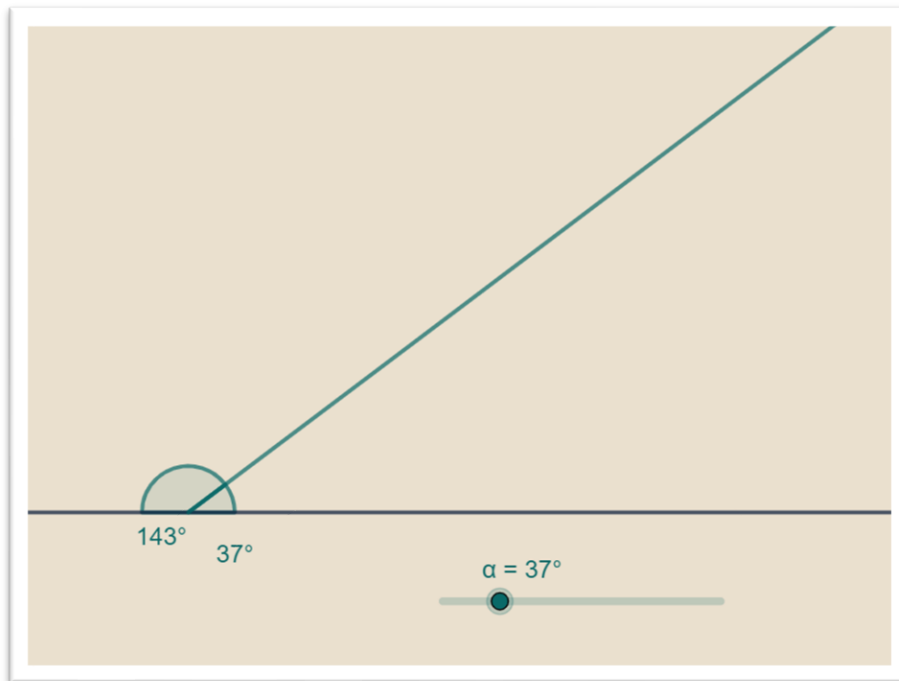
---

---

---

---

# En delt lige vinkel



Åbn arbejdsarket på [kortlink.dk/266cq](https://kortlink.dk/266cq)

Den grønne linje deler en lige vinkel i to mindre vinkler.

Flyt på skyderen. Hvad opdager du om de to vinkler?

---

---

---

---

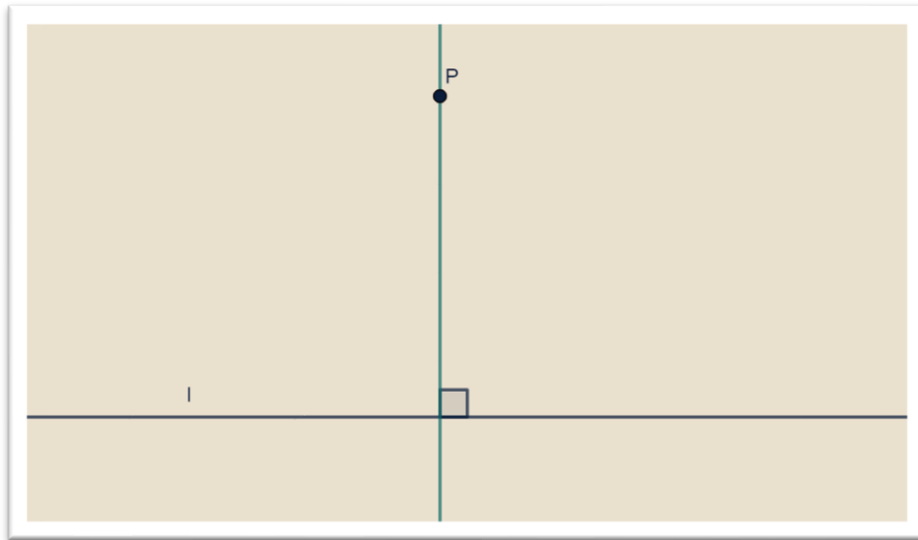
---

---

---

---

# Normaler



Tegn en linje,  $l$ .



Afsæt et punkt,  $P$ , udenfor  $l$ .



Tegn en **normal** til  $l$  gennem  $P$ .

Hvilket værktøj bruger du til at tegne en normal?

Træk i punktet  $P$ . Hvad opdager du om normalen?

---

---

---

---

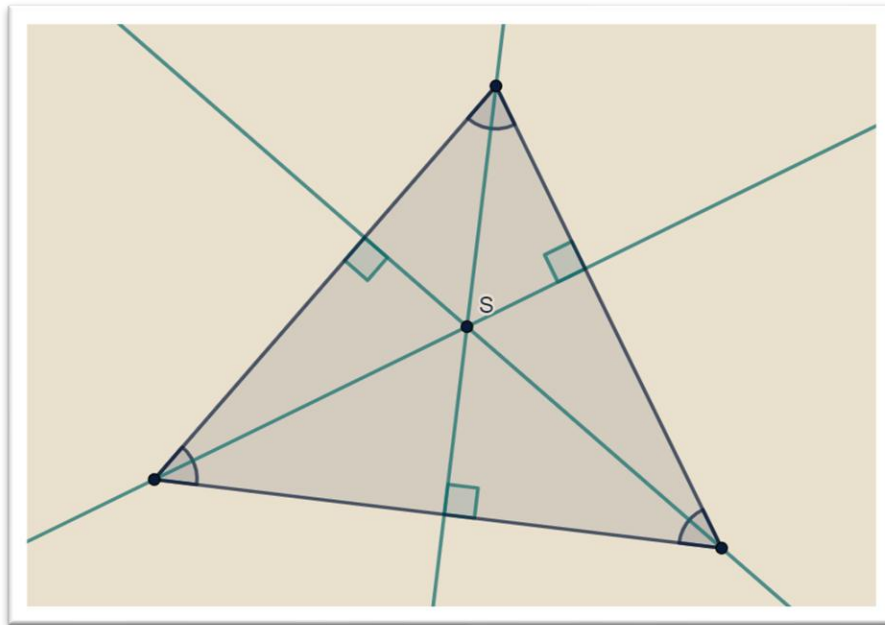
---

---

---

---

# Højder i en trekant



Tegn en trekant.



Mål trekantens vinkler.



Tegn trekantens tre **normaler** - altså trekantens højder.



Markér højdernes skæringspunkt, S.

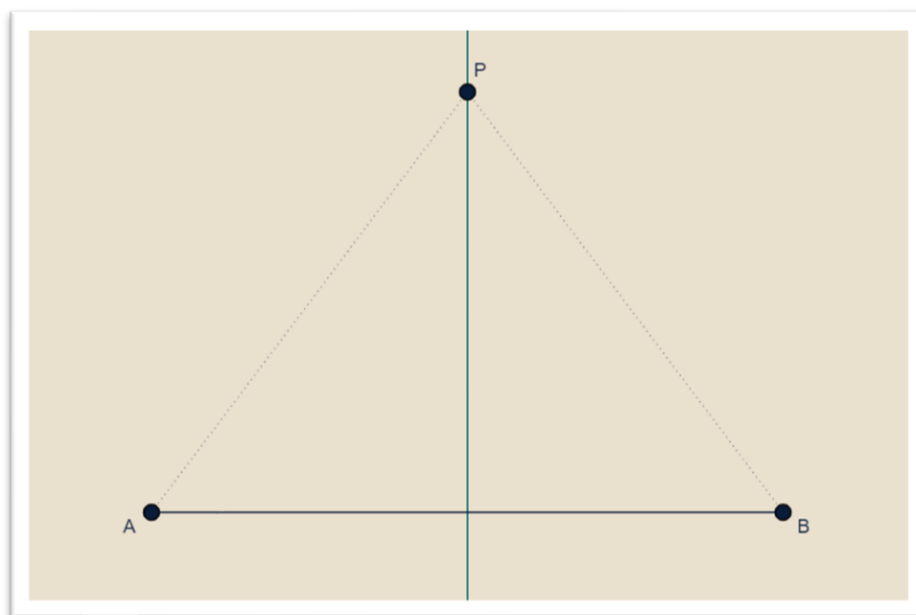
Træk i vinkelspidserne. Hvornår ligger skæringspunktet, S:

Indeni trekanten? \_\_\_\_\_

På trekanten? \_\_\_\_\_

Udenfor trekanten? \_\_\_\_\_

# Midtnormaler



Tegn et linjestykke  $|AB|$ .



Tegn **midtnormalen** til  $|AB|$ .



Afsæt et punkt,  $P$ , på midtnormalen.



Mål længden af  $|AP|$  og  $|BP|$ .

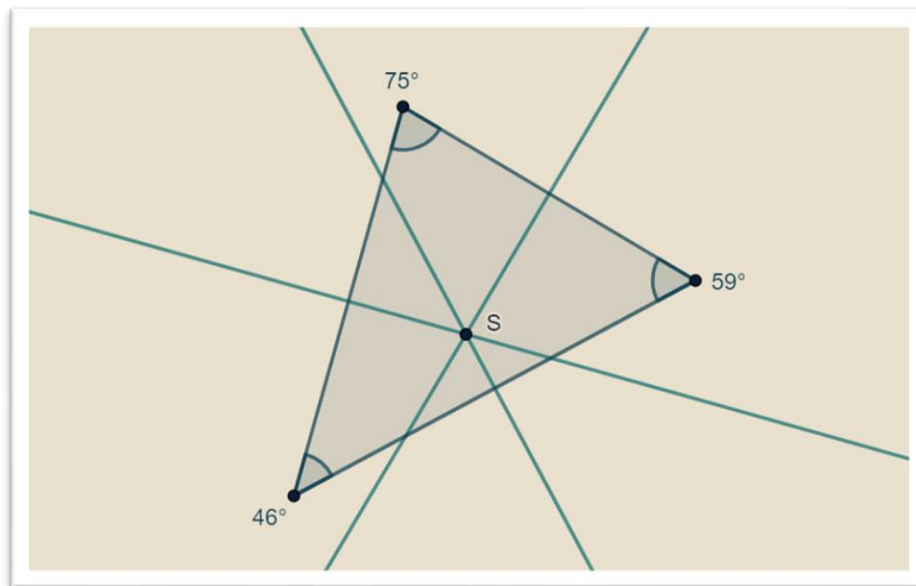
Træk i punktet  $P$ . Hvad opdager du afstandene  $|AP|$  og  $|BP|$ ? Træk i punkterne  $A$  og  $B$ . Hvad opdager du nu om afstandene? Formulér en regel for afstanden fra et vilkårligt punkt på midtnormalen til  $A$  og  $B$ .

---

---

---

# Midtnormaler i en trekant



Tegn en trekant.



Tegn **midtnormalen** til hver side.



Markér midtnormalernes skæringspunkt og kald det S.



Mål trekantens vinkler.

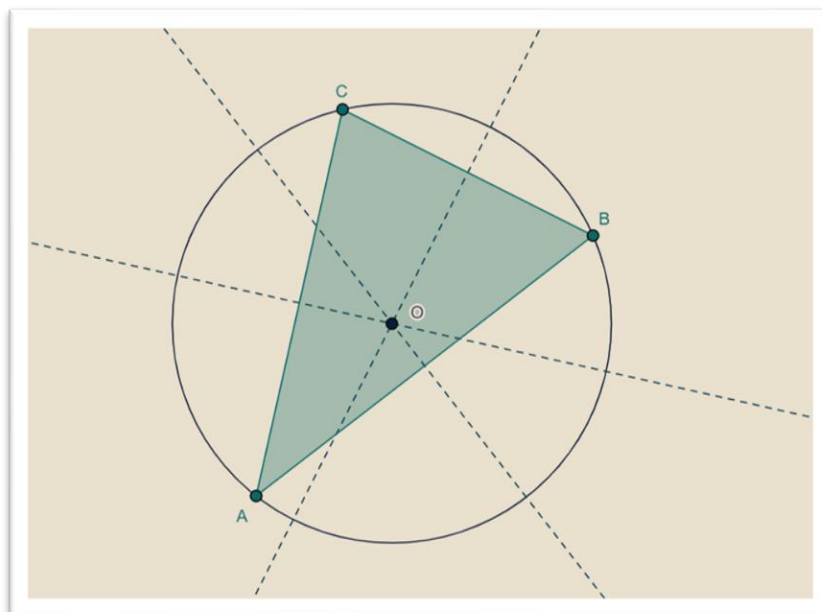
Træk i vinkelspidserne. Hvor ligger S:

I en spidsvinklet trekant? \_\_\_\_\_

I en retvinklet trekant? \_\_\_\_\_

I en stumpvinklet trekant? \_\_\_\_\_

# Trekantens omskrevne cirkel



Tegn en trekant, ABC.



Tegn **midtnormalen** til hver side.



Markér skæringen mellem midtnormalerne.



Tegn en cirkel med centrum i O og radius OA.

Træk i punkterne A, B og C. Hvad opdager du om cirklen?

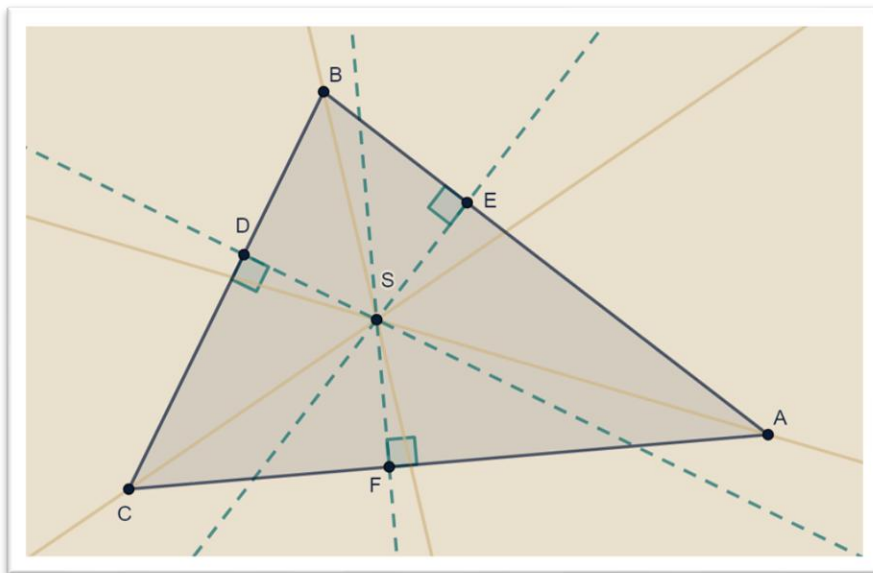
Hvorfor er midtnormalernes skæringspunkt centrum for trekantens omskrevne cirkel?

---

---

---

# vinkelhalveringslinjer



Tegn en trekant, ABC.



Tegn de tre vinklers **vinkelhalveringslinjer**.



Markér vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt, S.



Tegn **normalerne** til trekantens sider gennem S.



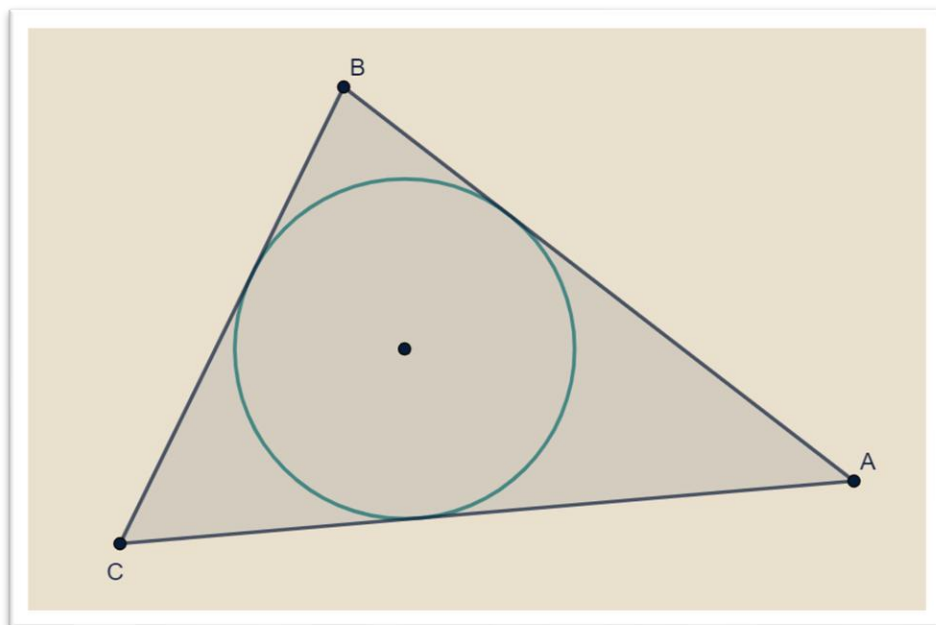
Markér skæringspunkterne mellem normalerne og trekantens sider og kald dem D, E og F.

Mål afstandene  $|SD|$ ,  $|SE|$  og  $|SF|$ . Formulér en regel for afstanden fra vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt til trekantens sider.

---

---

# Trekantens indskrevne cirkel



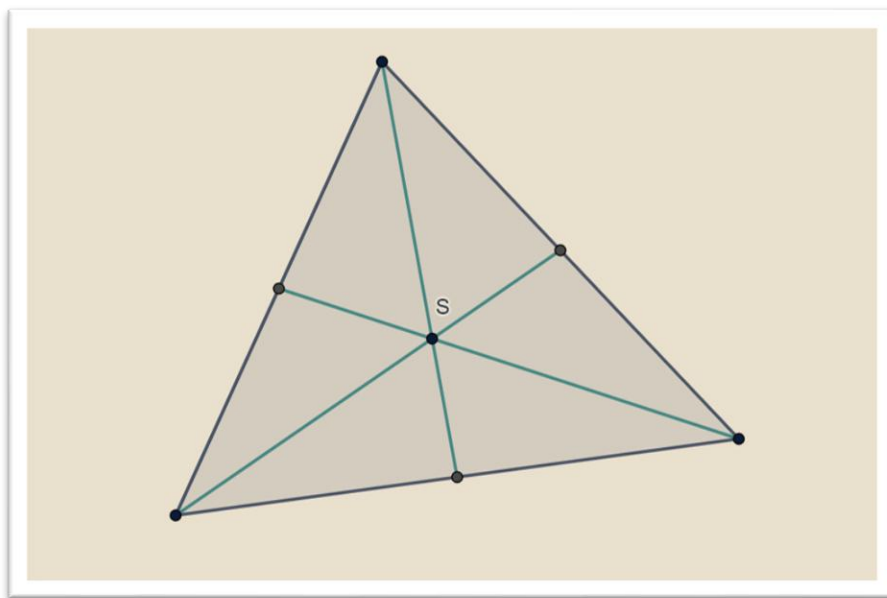
Tegn en trekant, ABC.

Brug din viden fra dit arbejde med vinkelhalveringslinjer til at konstruere trekantens indskrevne cirkel. Skriv eller skærmohtag en forklaring af, hvordan du konstruerer den indskrevne cirkel.



En trekants indskrevne cirkel tangerer (rører) alle trekantens sider.

# Medianer



Tegn en trekant.



Markér hver sides midtpunkt.



Tegn trekantens medianer.



Markér medianernes skæringspunkt, S.

Træk i vinkelspidserne. Hvorfor kan s ikke ligge udenfor trekanten?

---

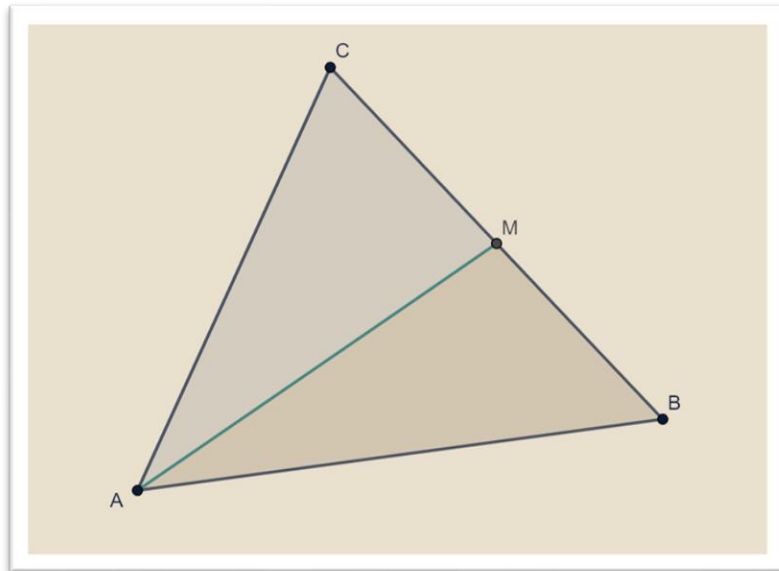
---

---

---

---

# Del med median



Tegn en trekant, ABC.



Markér midtpunktet, M, på  $|BC|$ .



Tegn en **median**.



Tegn to nye trekanter, ABM og AMC.



Mål arealet af trekanterne ABM og AMC.

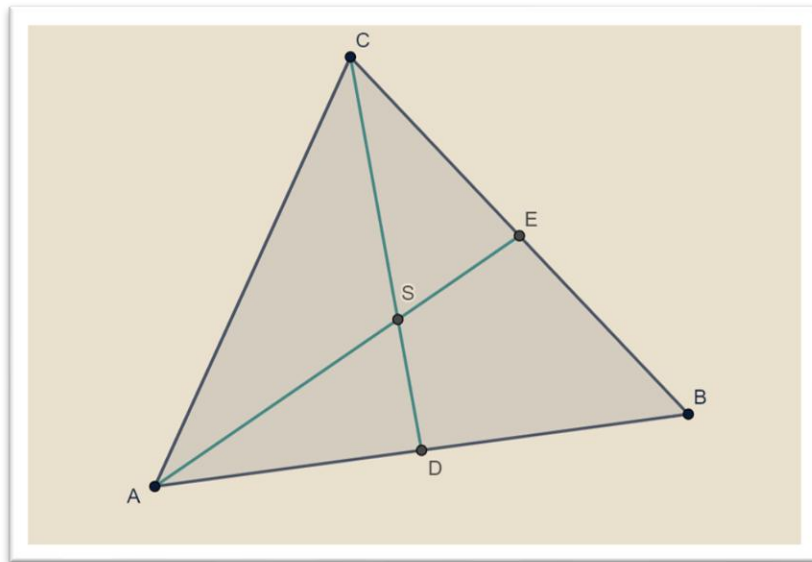
Hvad opdager du om arealet af trekanterne? Formulér en regel om medianer og arealer.

---

---

---

# Forholdet mellem medianer



Tegn en trekant, ABC.



Markér to sider midtpunkt, D og E.



Tegn to medianer.



Markér medianernes skæringspunkt, S.



Mål længden af  $|AS|$ ,  $|SE|$ ,  $|CS|$  og  $|SD|$ .

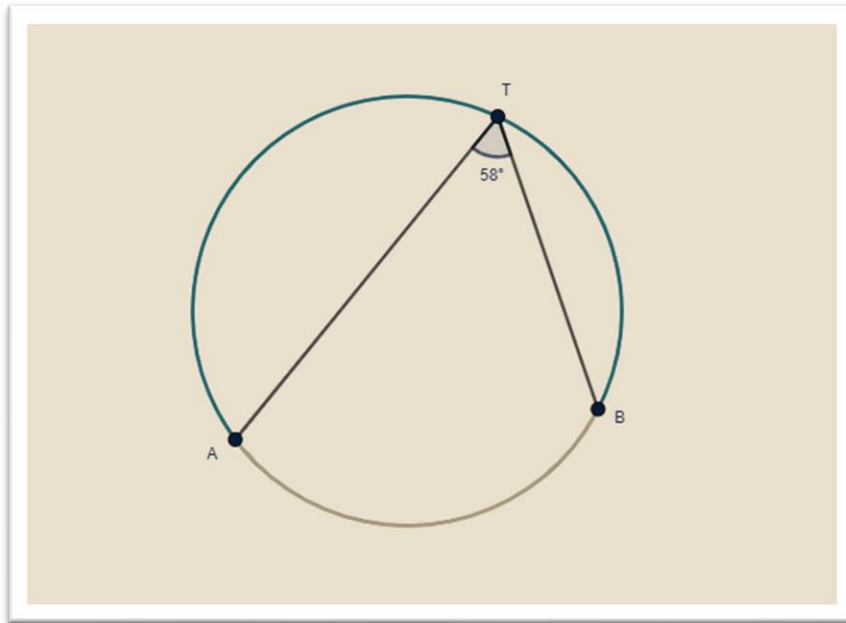
Beregn forholdene  $\frac{|AS|}{|SE|}$  og  $\frac{|CS|}{|SD|}$ .

Hvad opdager du om forholdene?

---

---

# vinke1 i en cirke1



Tegn en cirke1.



Afsæt punkt A, B og T p1 cirkelperiferien.



Tegn linjestykkerne |AT| og |BT|.



M11  $\angle ATB$ .

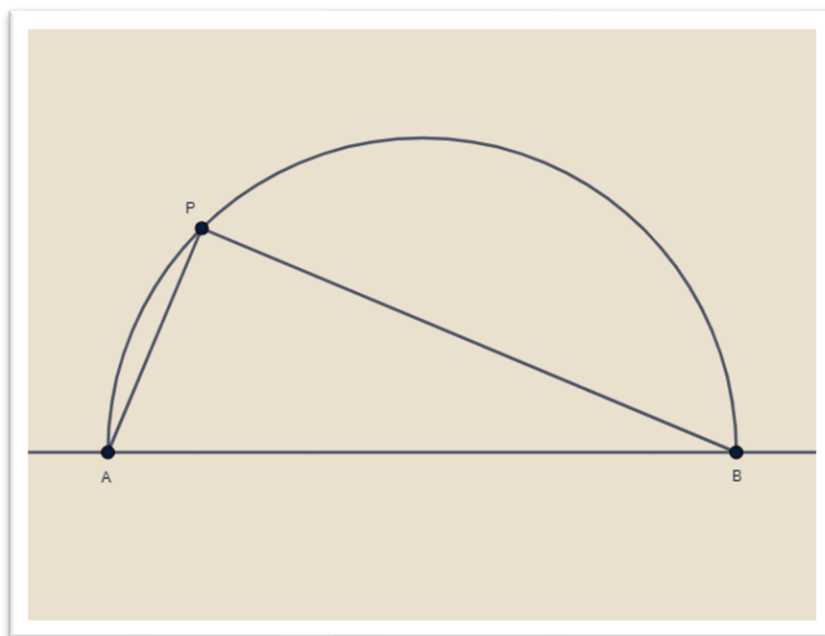
Træk i punktet T. Hvad opdager du om  $\angle ATB$ , n1r T ligger p1 den st1rste (bl1) cirkelbue? P1 den mindste (brun) cirkelbue? Flyt p1 A og B og gentag.

---

---

---

# vinkel i en halvcirke



Tegn en linje.



Afsæt en halvcirke på linjen.



Afsæt punktet P på periferien.



Tegn linjestykkerne  $|AP|$  og  $|BP|$ .

Mål  $\angle APB$ . Træk i punktet P. Hvad opdager du om  $\angle APB$ ?

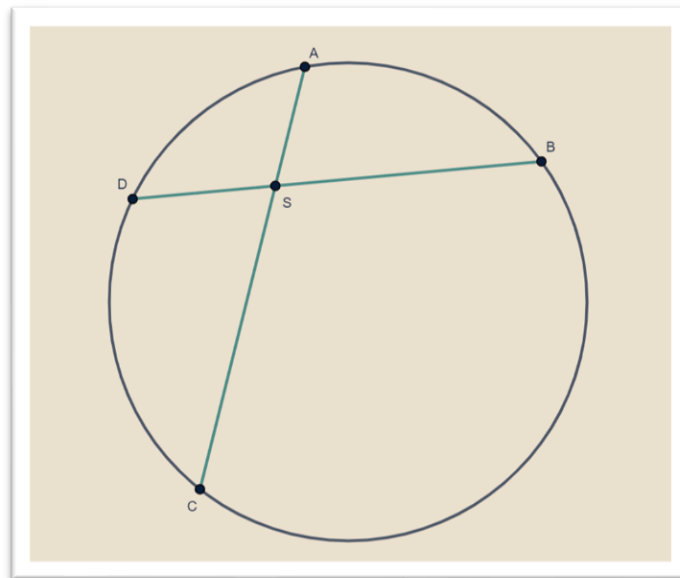
---

---

---

---

# To korder



Tegn en cirkel.



Afsæt fire punkter, A, B, C og D, på cirkelperiferien.



Tegn et linjestykke mellem A og C og et andet linjestykke mellem B og D.



Marker linjestykkernes skæringspunkt, S.



Mål  $|AS|$ ,  $|SC|$ ,  $|DS|$  og  $|SB|$ .

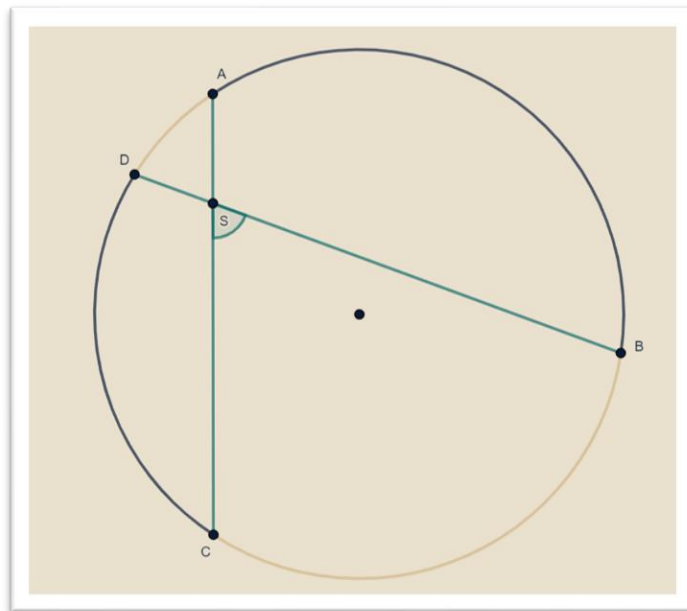
Træk i punkterne. Hvad opdager du om  $|AS| \cdot |SC|$  og  $|DS| \cdot |SB|$ ?

---

---

---

# Fire cirkelbuer



Fortsæt med din konstruktion fra *To korder*.



Tegn fire cirkelbuer, AD, DC, CB og BA.

Træk i punkterne så:

cirkelbue AD + cirkelbue CB = cirkelbue DC + cirkelbue BA?

Hvor stor er vinkel S?

---

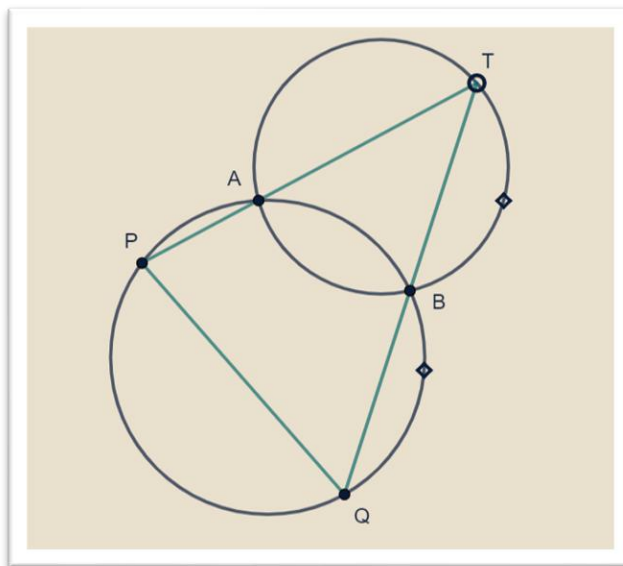
---

---

---

---

# To cirkler skærer hinanden



Tegn to cirkler der skærer hinanden i A og B.



Afsæt punktet T på cirkelperiferien.



Tegn linjer fra T igennem A og B og markér skæringspunkterne P og Q.



Tegn linjestykkerne  $|PT|$ ,  $|QT|$  og  $|PQ|$ .



Mål  $|PQ|$ .

Træk i punktet T. Hvad opdager du om længden af korden  $|PQ|$ ?

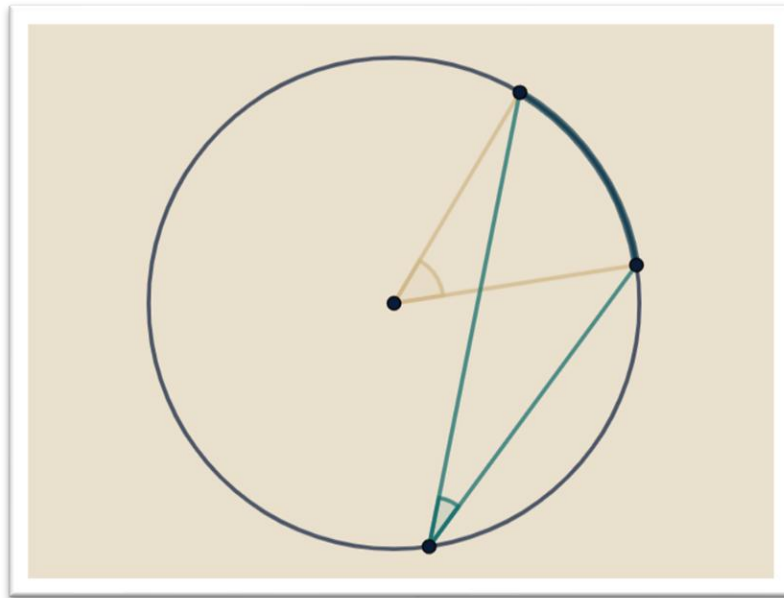
---

---

---

---

# Periferivinkler



Tegn en cirkel.



Afsæt tre punkter på cirkelperiferien.



Tegn en **periferivinkel** og en **centervinkel** der spænder over samme **buestykke**.



Mål periferivinklen og centervinklen.

Træk i de tre punkter på cirkelperiferien. Hvad opdager du om forholdet mellem størrelsen af en periferivinkel og dens centervinkel?

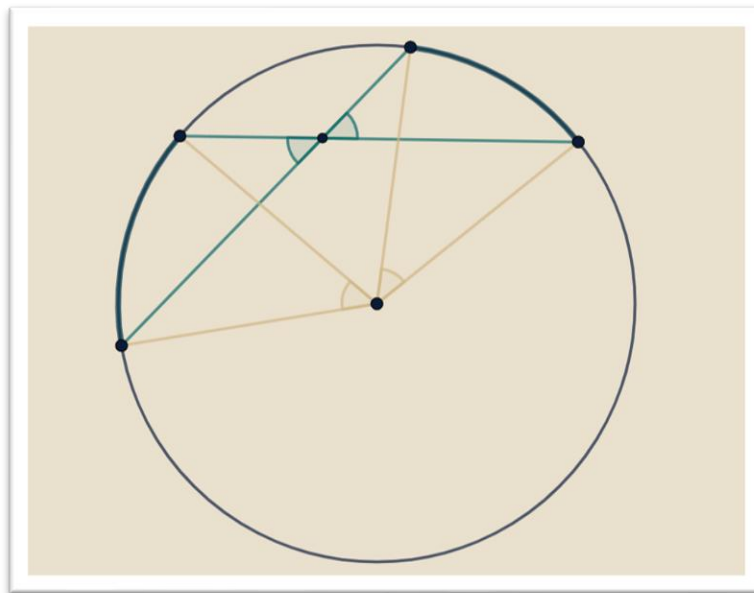
---

---

---

---

# Indvendige vinkler



Tegn en cirkel.



Afsæt fire punkter på cirkelperiferien.



Tegn to **korder** der skærer hinanden. Tegn de to tilhørende **centervinkler**.



Mål de fire vinkler.

Hvad opdager du om forholdet mellem størrelsen af en **indvendig vinkel** og de to centervinkler?

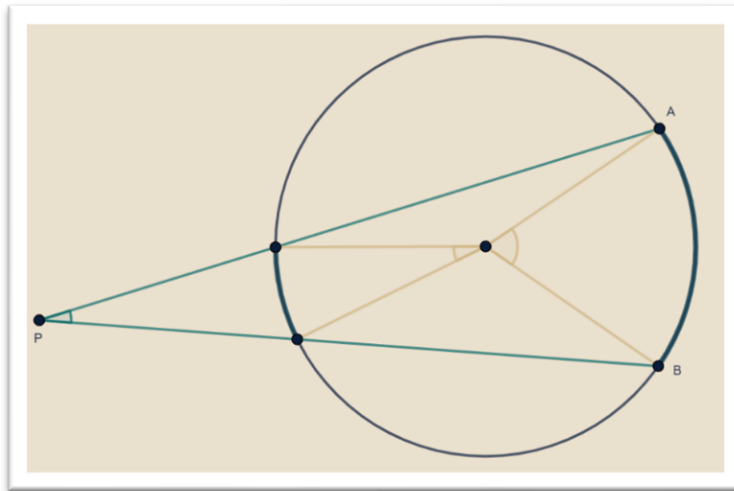
---

---

---

---

# Udvendige vinkler



Tegn en cirkel.



Afsæt punkterne A og B på cirkelperiferien og punket P udenfor cirklen.



Tegn en **udvendig vinkel**.



Markér skæringerne mellem **linjestykker** og cirkelperiferi.



Tegn de to tilhørende **centervinkler**.



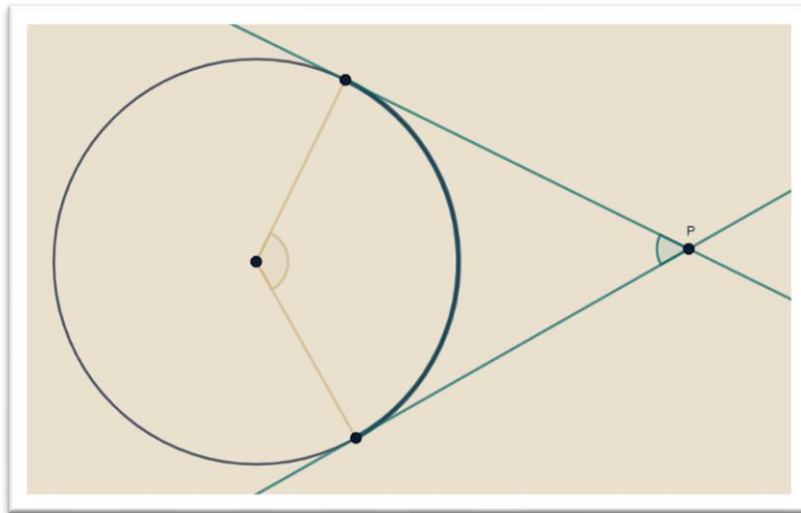
Mål de tre vinkler.

Hvad opdager du om forholdet mellem størrelsen på den udvendige vinkel og differencen på størrelserne af de tilhørende centervinkler?

---

---

# Tangentvinkler



Tegn en cirkel.



Afsæt punktet P udenfor cirklen.



Tegn de to **tangenter** til cirklen der går gennem P.



Markér skæringerne mellem **tangenter** og cirkelperiferi.



Tegn **centervinklen** til den mindste af cirkelbuerne.



Mål de to vinkler.

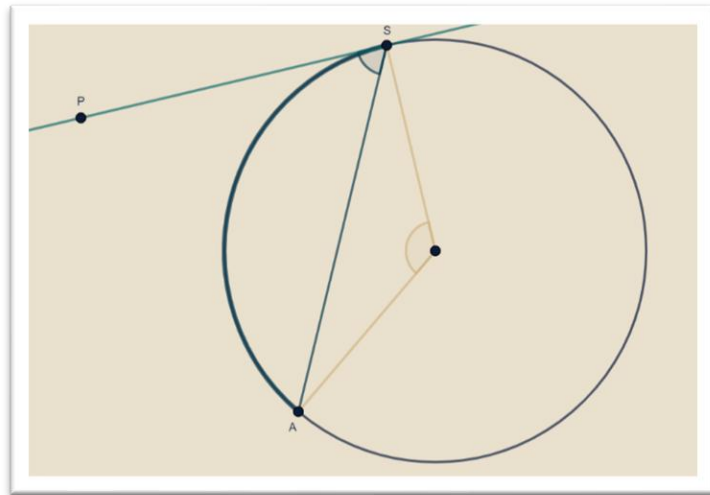
Hvad opdager du om summen af centervinklen og tangentvinklen?

---

---

---

# Korde-tangentvinkler



Tegn en cirkel.



Afsæt punktet P udenfor cirklen og punktet A på cirkelperiferien.



Tegn en **tangent** til cirklen der går gennem P.



Markér skæringen, S, mellem **tangent** og cirkelperiferi.



Tegn linjestykket  $|AS|$  og **centervinklen**.



Mål  $\angle ASP$  og **centervinklen**.

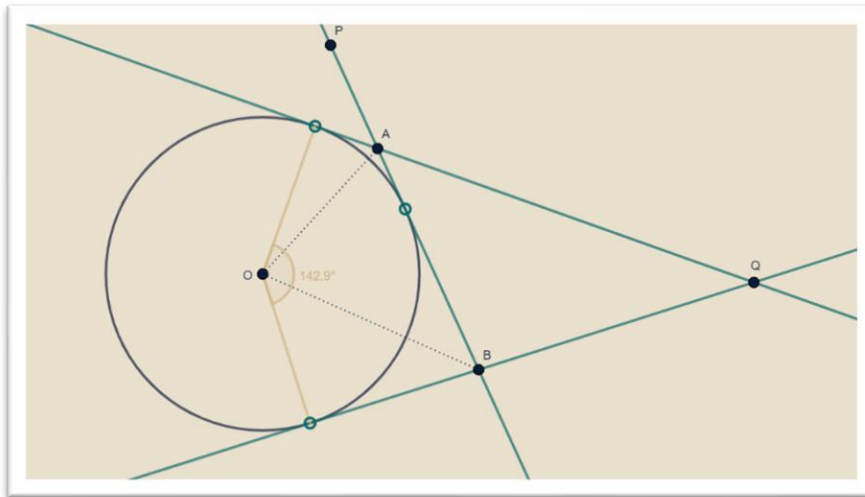
Hvad opdager du om forholdet mellem størrelserne af de to vinkler?

---

---

---

# De tre tangenter



Tegn en cirkel.



Afsæt punkterne P og Q udenfor cirklen.



Tegn tre **tangenter** til cirklen gennem P og Q.



Markér skæringerne mellem **tangenter** og cirkelperiferi. Markér tangenternes skæringer, punkt A og B.



Tegn **centervinklen**.



Mål **centervinklen** og  $\angle AOB$ .

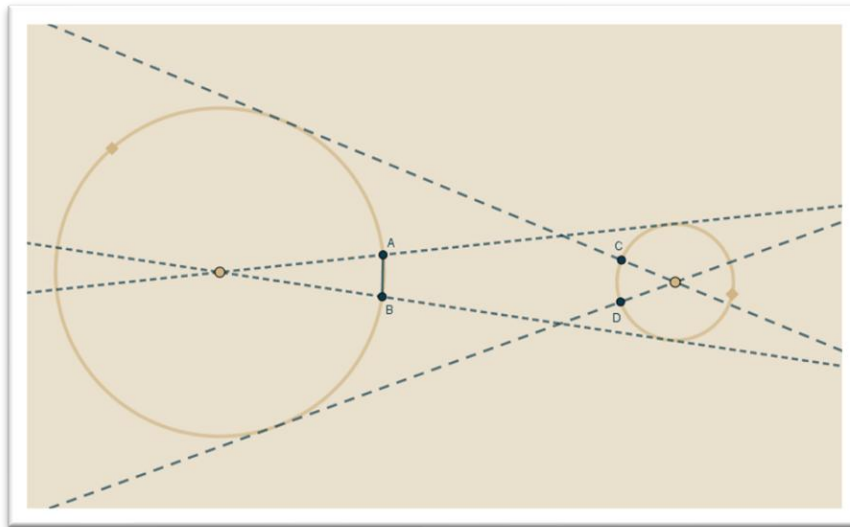
Hvad opdager du om forholdet mellem størrelserne af de to vinkler?

---

---

---

# De to øjne



Tegn to cirkler.



Tegn tangenter til hver cirkel fra den anden cirkels centrum.



Markér skæringerne mellem tangenter og cirkelperiferier.



Tegn linjestykkerne  $|AB|$  og  $|CD|$ .

Hvad opdager du om linjestykkerne  $|AB|$  og  $|CD|$ ? Gælder det altid?

---

---

---

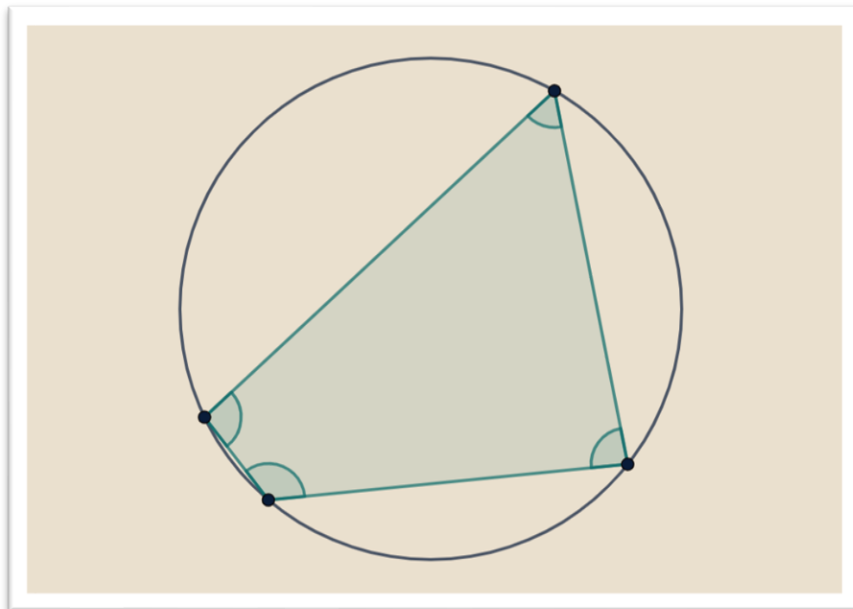
---

---

---

---

# (vinkler(Firkant(Cirkel)))



Tegn en cirkel.



Afsæt fire punkter på cirkelperiferien.



Tegn en firkant ved at forbinde punkterne.



Mål vinklerne.

Træk i punkterne. Hvilken sammenhæng er der mellem vinklerne i en firkant, hvor hjørnepunkterne ligger på en cirkel?

---

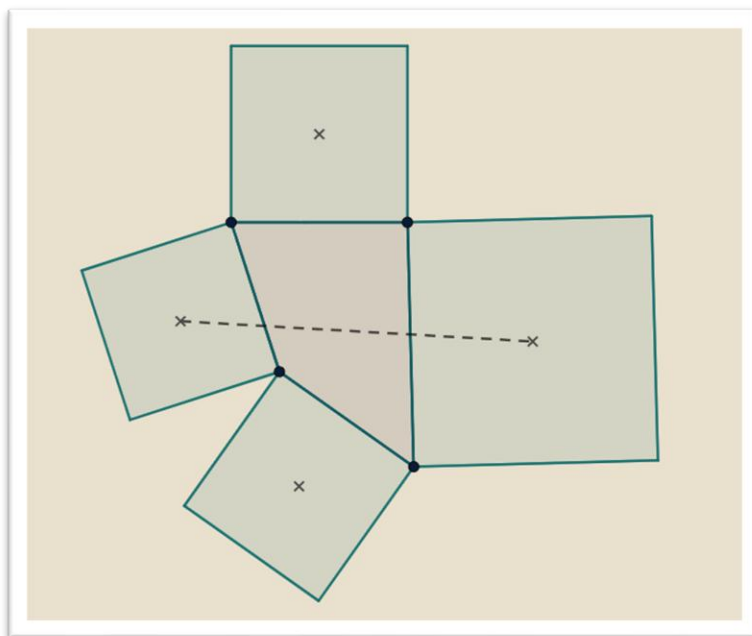
---

---

---

---

# Aubels sætning



Tegn en firkant.



Tegn et kvadrat på hver af firkantens sider.



Afsæt midtpunktet i hvert kvadrat.



Forbind de modstående kvadraters midtpunkter med et linjestykke.

Hvad opdager du omkring de to linjestykker?

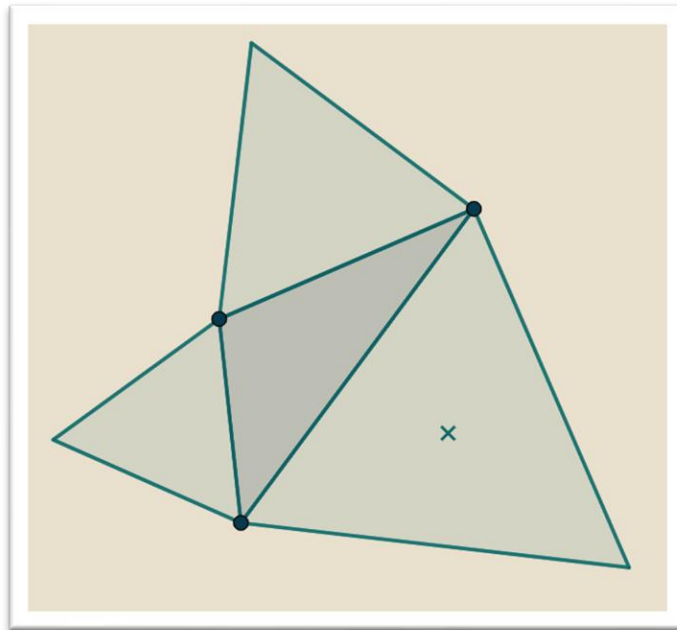
---

---

---

---

# Napoleons sætning



Tegn en vilkårlig trekant.



Tegn en ligesidet trekant på hver af trekantens sider.



Afsæt midtpunktet i hver ligesidet trekant.



Tegn en trekant med de tre midtpunkter som hjørner.

Hvad opdager du omkring denne nye trekant?

---

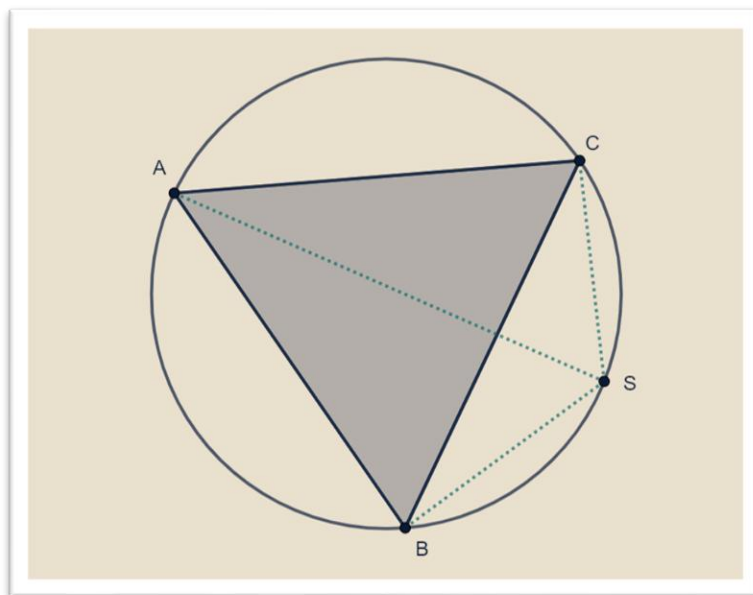
---

---

---

---

# Van Schootens sætning



Tegn en ligesidet trekant, ABC.

Konstruér trekantens omskrevne cirkel.



Afsæt et punkt, S, på cirkelperiferien.



Mål længden af  $|SA|$ ,  $|SB|$  og  $|SC|$ .

Flyt på S. Hvad opdager du om længden af linjestykkerne?

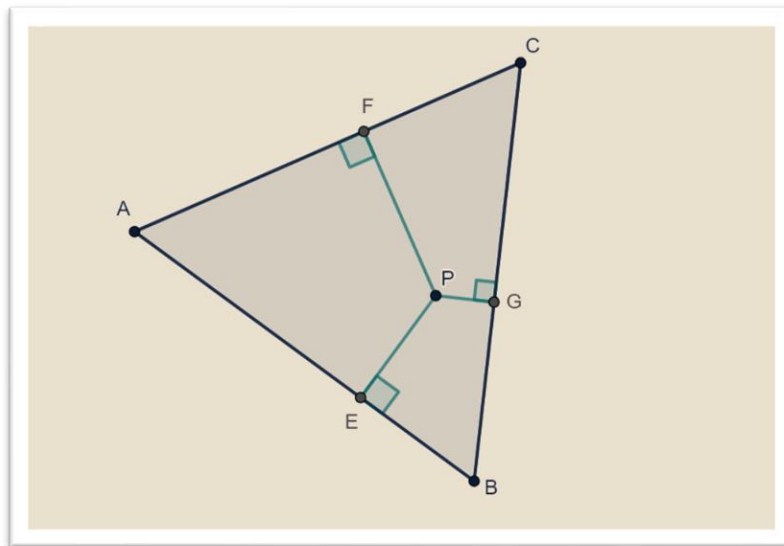
---

---

---

---

# Vivianis sætning



Tegn en ligesidet trekant, ABC.



Afsæt et punkt, P, indeni trekanten.



Tegn **normalerne** gennem P.



Markér skæringspunkterne, E, F, G, mellem normalerne og trekantens sider.



Mål længden af  $|PE|$ ,  $|PF|$  og  $|PG|$ .

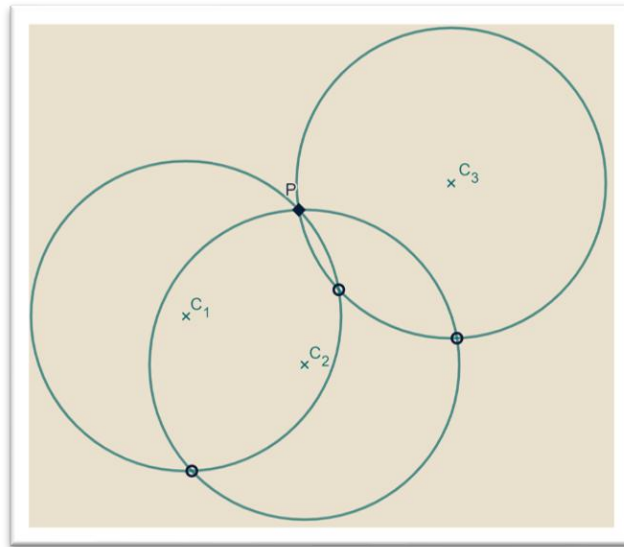
Flyt på P. Hvad opdager du om længden af de tre linjestykker i forhold til trekantens højde?

---

---

---

# Johnsons sætning



Afsæt et punkt,  $P$ .

Tegn tre kongruente cirkler, der passerer gennem et fælles punkt,  $P$ .



Markér de tre nye skæringspunkter.

Ligger de tre skæringspunkter på periferien af en ny cirkel, eller er det tre af hjørnerne i et rektangel? Hvilken størrelse har cirklen eller rektanglet i forhold til de tre oprindelige cirkler?

---

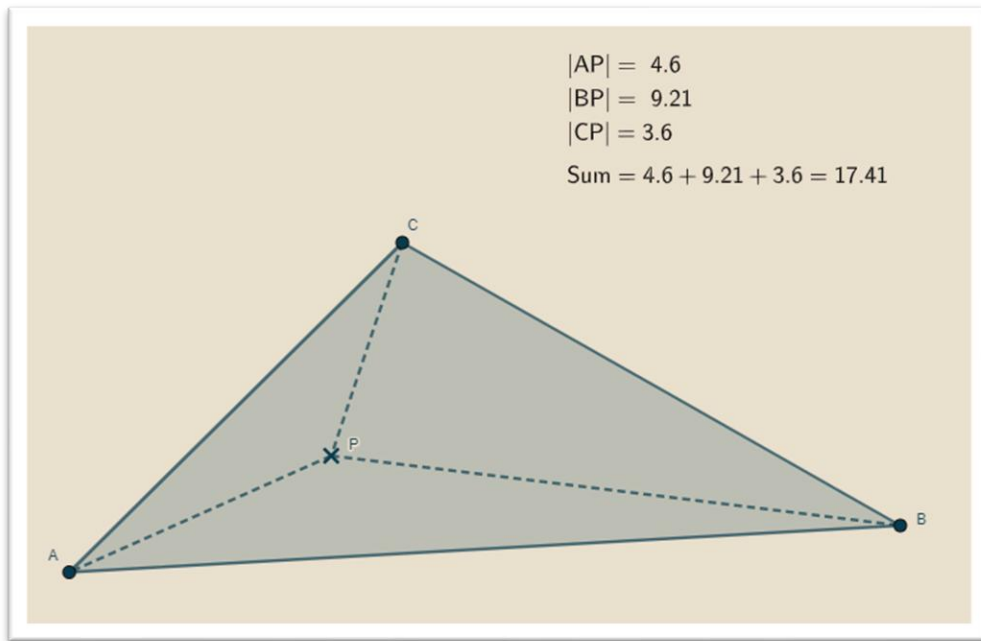
---

---

---

---

# Fermats punkt



Åbn arbejdsarket på [kortlink.dk/25bhf](https://kortlink.dk/25bhf)

Træk i punktet P så summen af afstandene til hjørnerne bliver så lille som mulig. Hvor skal punktet placeres? Hvor stor er den samlede afstand?

Lås punkt A, B og/eller C op og ændr på trekanten. Hvor skal P nu placeres?

Hvilken sammenhæng finder du?

---

---

---

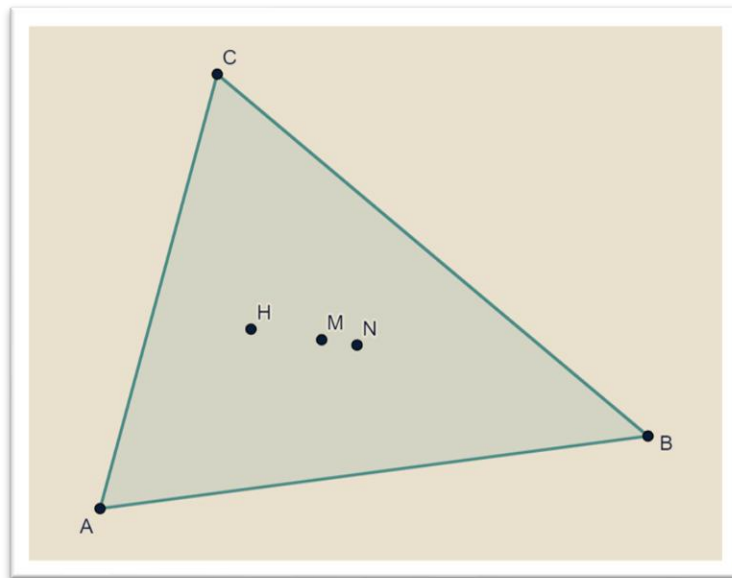
---

---

---

---

# Euler



Tegn en trekant, ABC.

Tegn højderne og markér deres skæringspunkt, H.

Tegn medianerne og markér deres skæringspunkt, M.

Tegn midtnormalerne og markér deres skæringspunkt, N.

Skjul linjerne, så kun punkterne er synlige.

Træk i A, B og C. Hvad opdager du om skæringspunkterne?

---

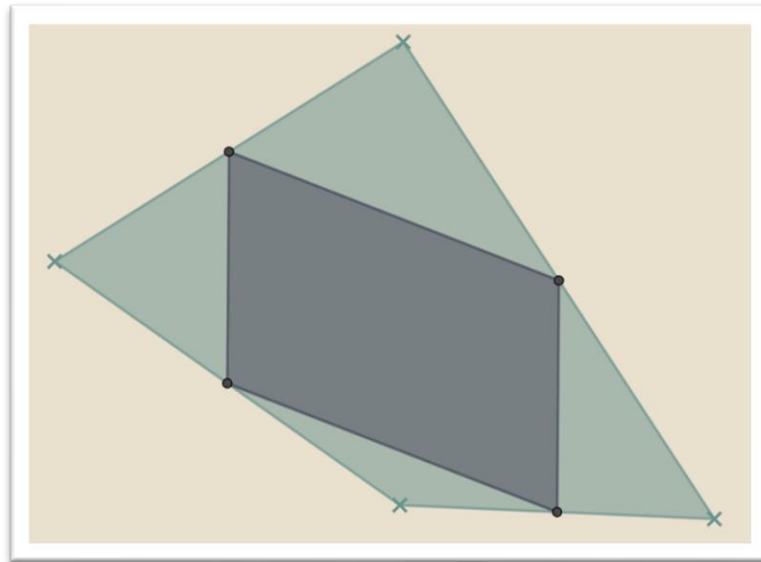
Mål  $|HM|$  og  $|MN|$ . Hvad opdager du om sammenhængen mellem længderne?

---

Hvad opdager du om sammenhængene, hvis ABC er ligesidet?

---

# Hvorfor så firkantet?



Tegn en firkant.



Afsæt midtpunktet på hver side.



Forbind midtpunkterne så du får endnu en firkant.

Hvad opdager du om den nye firkant? Gælder det altid? Nogle gange?

Hvordan kan du være sikker?

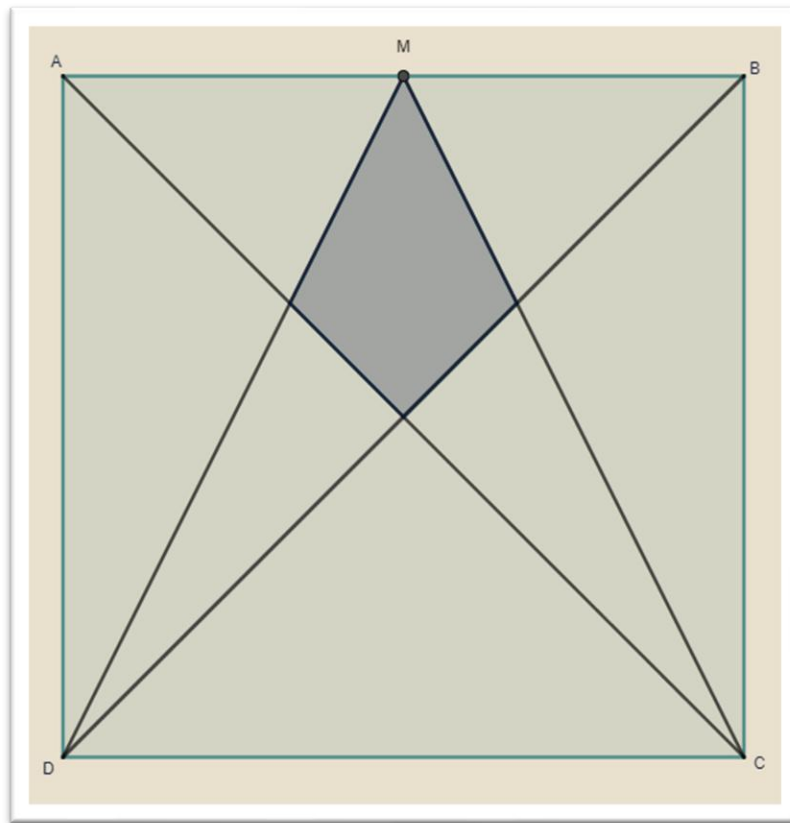
---

---

Beregn summen af diagonalernes længde i den oprindelige firkant. Find omkredsen i den nye firkant. Hvad finder du ud af, når du sammenligner de to størrelser?

---

# Dragen i kvadratet



ABCD er et kvadrat. M er midtpunkt på  $|AB|$ .

Hvor stor en brøkdel udgør dragefirkanten af det samlede areal? Du skal begrunde dit svar.

---

---

---

---

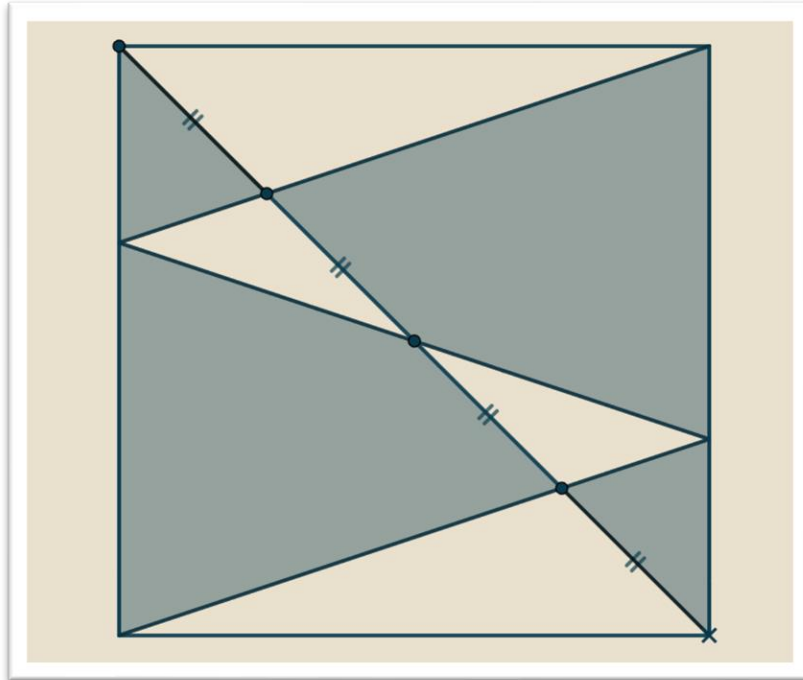
---

---

---

---

# Andel af kvadrat



Hvor stor en brøkdel af kvadratet er farvet mørkt?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

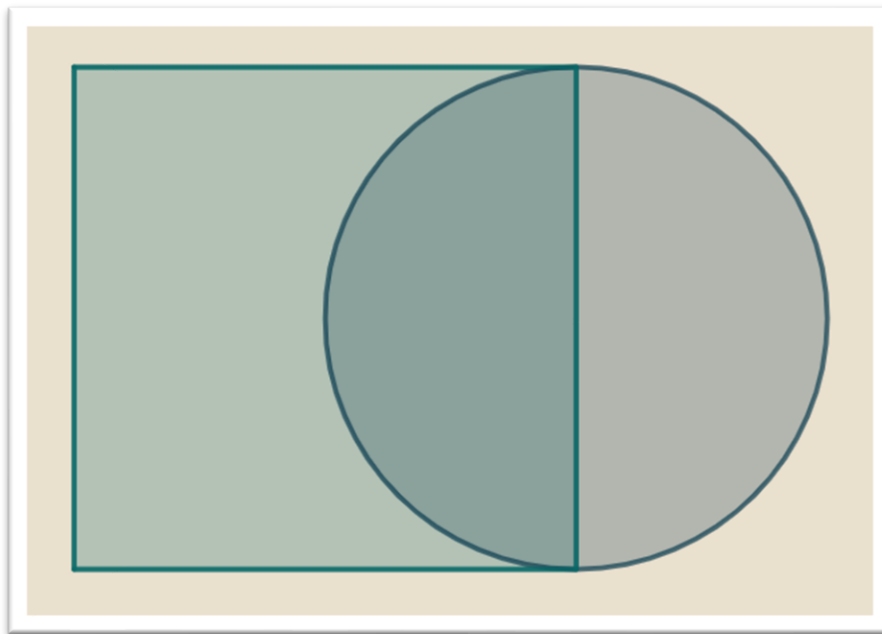
---

---

---

---

# Cirklen på kvadratet



Har cirklen eller kvadratet den største omkreds? Du skal begrunde dit svar.

---

---

---

---

---

---

---

---

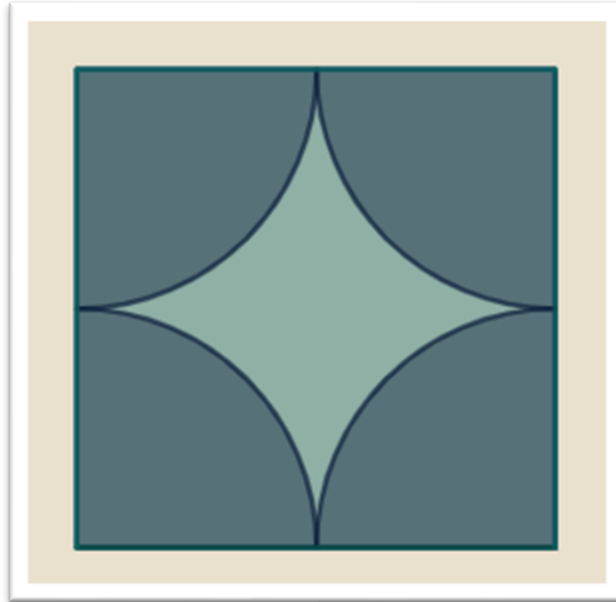
---

---

---

---

# De kvarte cirkler



Kvadratet har sidelængden 8. De fire hjørner er centrum i hver sin cirkel.

Hvor stort er arealet af det lyse område? Du skal begrunde dit svar.

---

---

---

Hvor stort er arealet af det lyse område i et kvadrat med sidelængden  $n$ ?

---

---

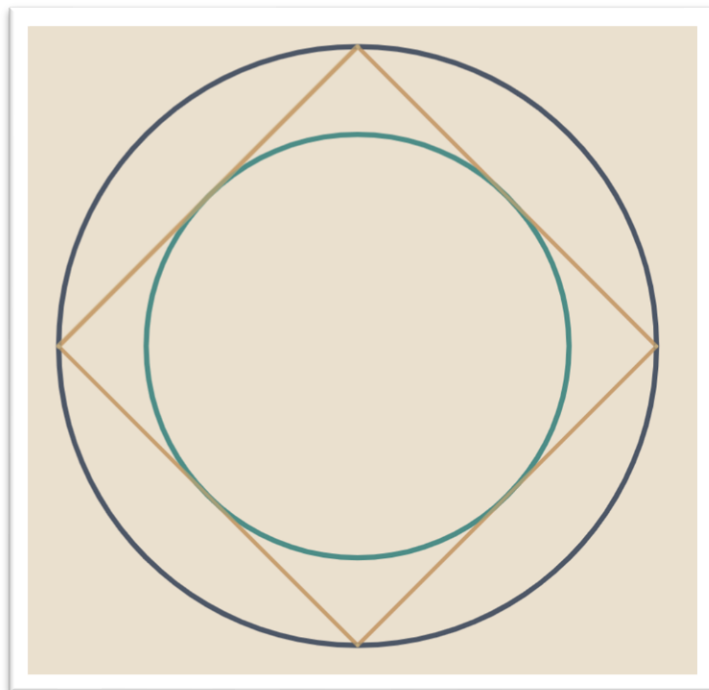
---

---

---

---

# Et kvadrat og to cirkler



Den blå cirkels radius er  $B$ . Den grønne cirkels radius er  $G$ . Firkanten er et kvadrat.

Bestem  $\frac{B}{G}$

---

---

---

---

---

---

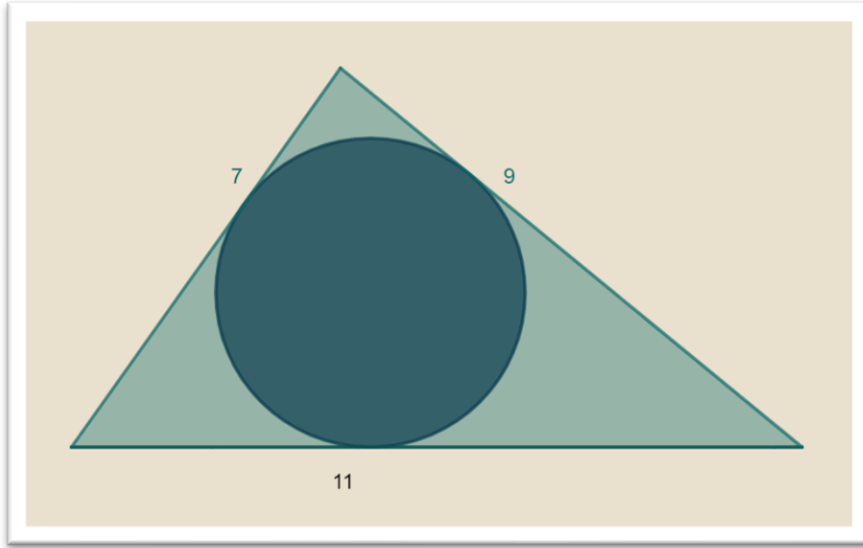
---

---

---

---

# Arealet af cirklen



Rektanglet har sidelængderne 7, 9 og 11. Hvor stort er arealet af den indskrevne cirkel?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

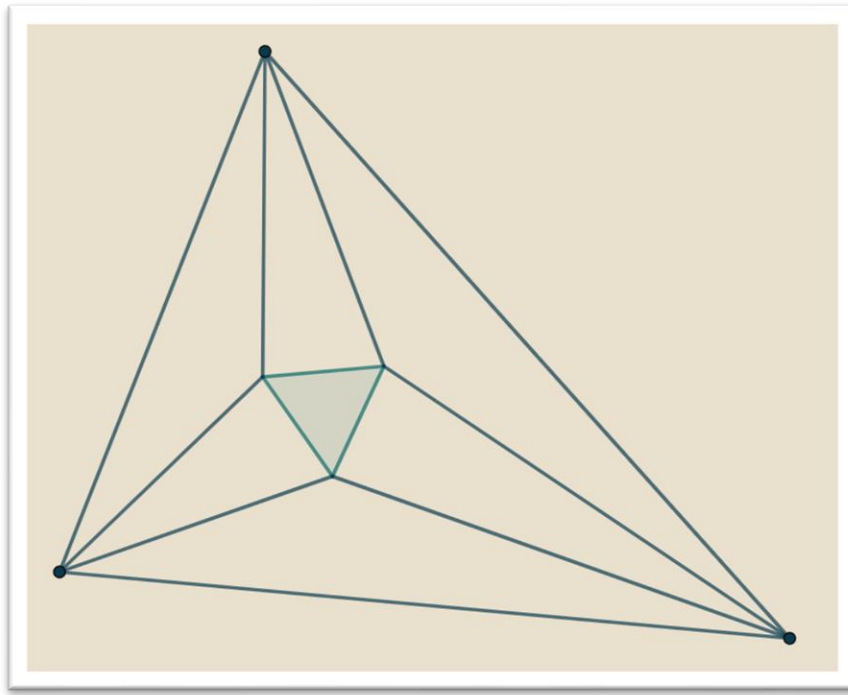
---

---

---

---

# Morleys trekant



Tegn en vilkårlig trekant og del hver vinkel i tre lige store dele. Markér tre af skæringspunkterne, så der dannes en **trekant** som på billedet.

Hvilken type trekant dannes, når den vilkårlige trekant er:

- spidsvinklet?
- retvinklet?
- stumpvinklet?

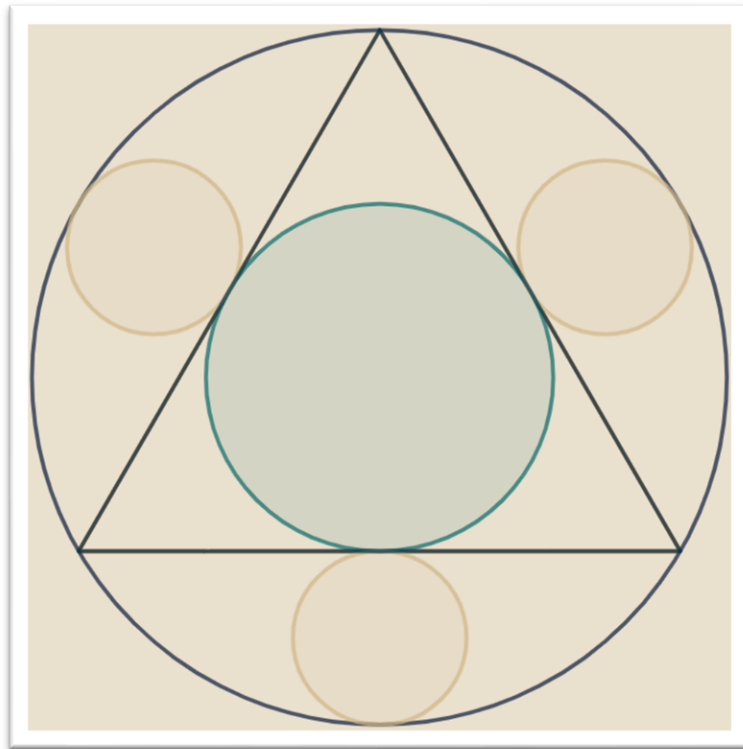
---

---

---

---

# Forhold mellem cirkler



Trekanten er ligesidet. Den grønne cirkel har radius  $a$ , og de gylde cirkler har radius  $b$ . Bestem forholdet mellem  $a$  og  $b$ , altså  $\frac{a}{b}$

---

---

---

---

---

---

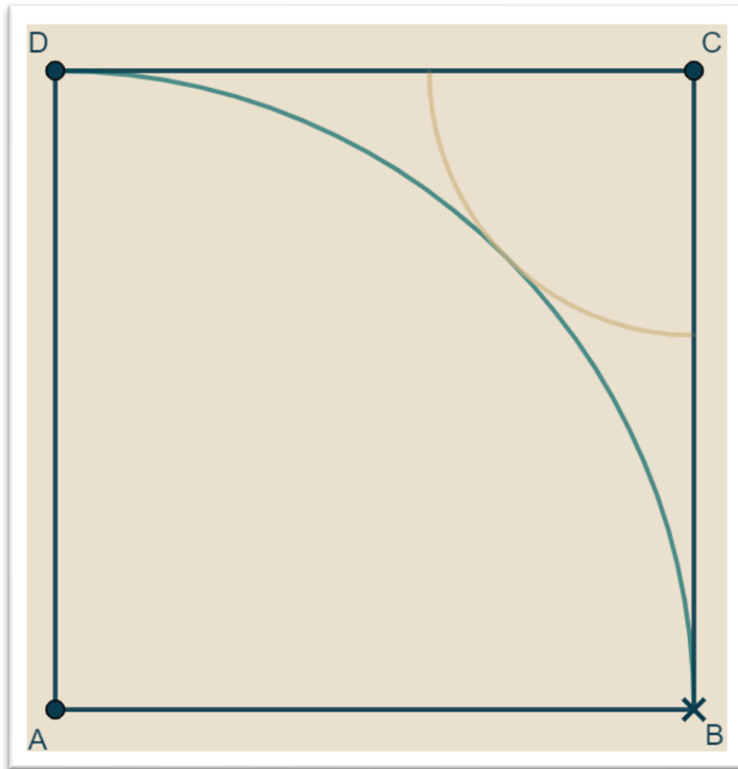
---

---

---

---

# Cirkelbuer i kvadrat



ABCD er et kvadrat. Den gyldne cirkelbue har radius  $a$ , og den grønne cirkelbue har radius  $b$ . Bestem forholdet mellem  $a$  og  $b$ , altså  $\frac{a}{b}$

---

---

---

---

---

---

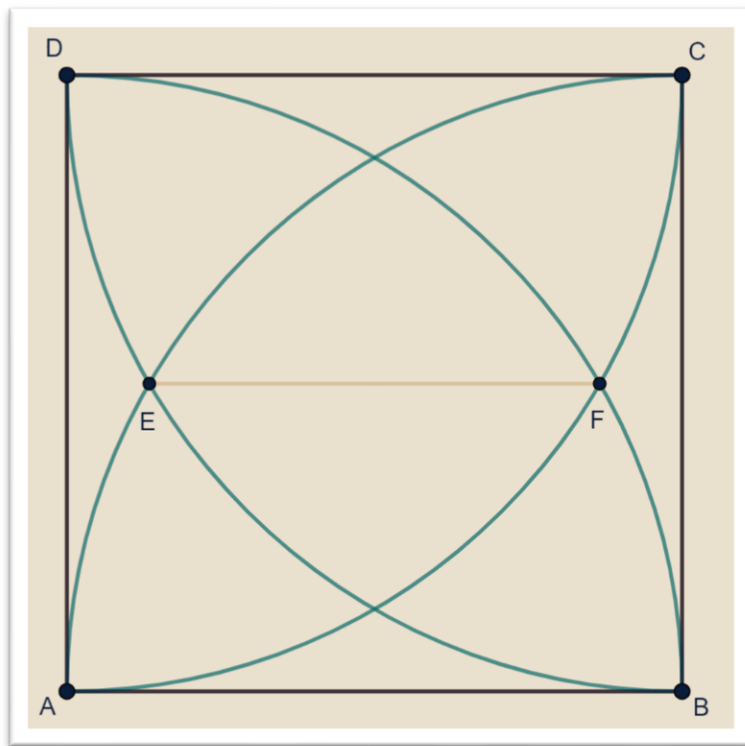
---

---

---

---

# Linjestykke mellem cirkelbuer



ABCD er et kvadrat med sidelængden  $s$ . Bestem  $\frac{EF}{s}$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

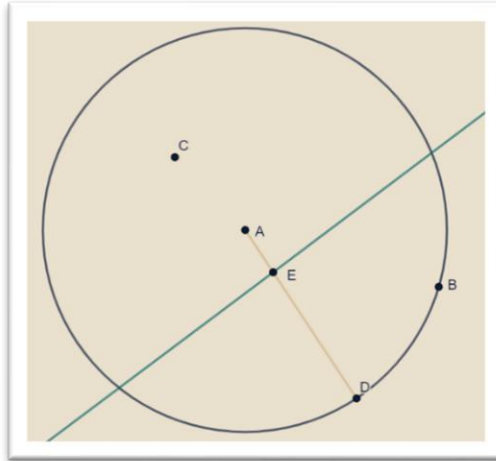
---

---

---

---

# Hvilken figur?



Afsæt to punkter, A og B.



Tegn en cirkel med centrum i A og radius  $|AB|$ .



Afsæt et punkt, C, inde i cirklen og et punkt, D, på cirkelperiferien.



Tegn **linjestykket** AD.



Tegn **midtnormalen** til CD.



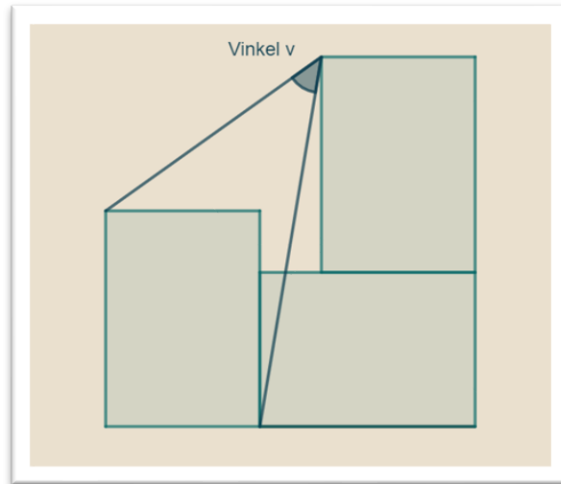
Markér skæringspunktet, E, mellem **midtnormalen** til CD og **linjestykket** AD.

Højreklik på E og vælg 'Vis spor'. Flyt på D. Hvilken figur tegner sporet? Hvilken betydning har placeringen af C og radius  $|AB|$ ?

---

---

# Tre kongruente rektangler



Konstruer et rektangel.



Tegn to kongruente rektangler ved hjælp af drejninger.

Hvor stor er vinkel  $v$ ?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

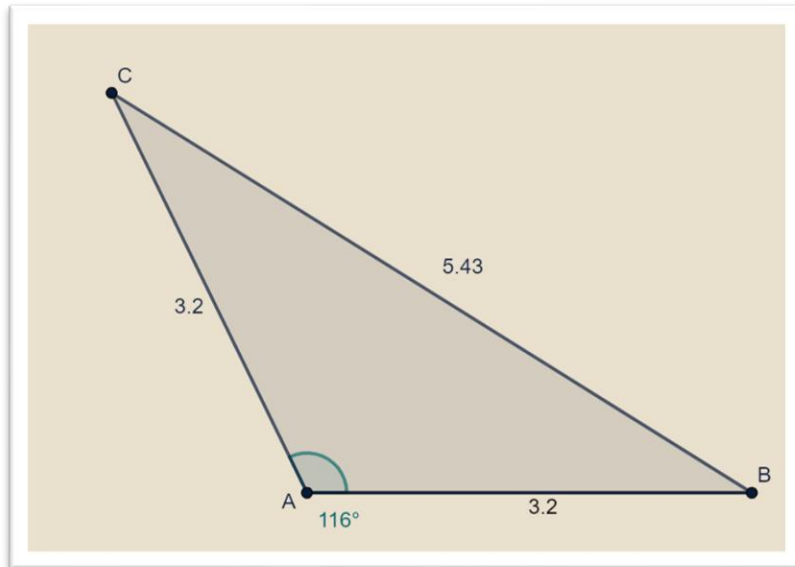
---

---

---

---

# Sandkassen



Jacob vil bygge en sandkasse med det størst mulige overfladeareal. Han har to træplader med længden 3,2 meter, som han vil bruge. Træpladen til sandkassens sidste side, skal han købe.

Hvor stor skal vinkel A være, for at arealet af sandkassens overflade bliver så stort som muligt?

Hvor lang skal den sidste træplade være?

---

---

---

---

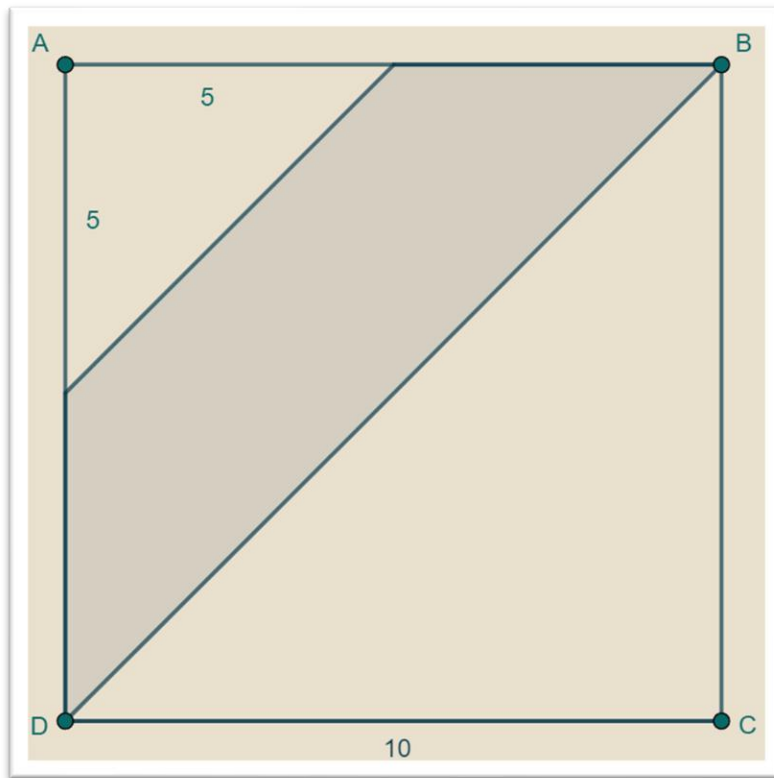
---

---

---

---

# Firkanten i kvadratet



ABCD er et kvadrat.

Hvor stor en brøkdel udgør den grønne figur af det samlede areal? Du skal begrunde dit svar.

---

---

---

---

---

---

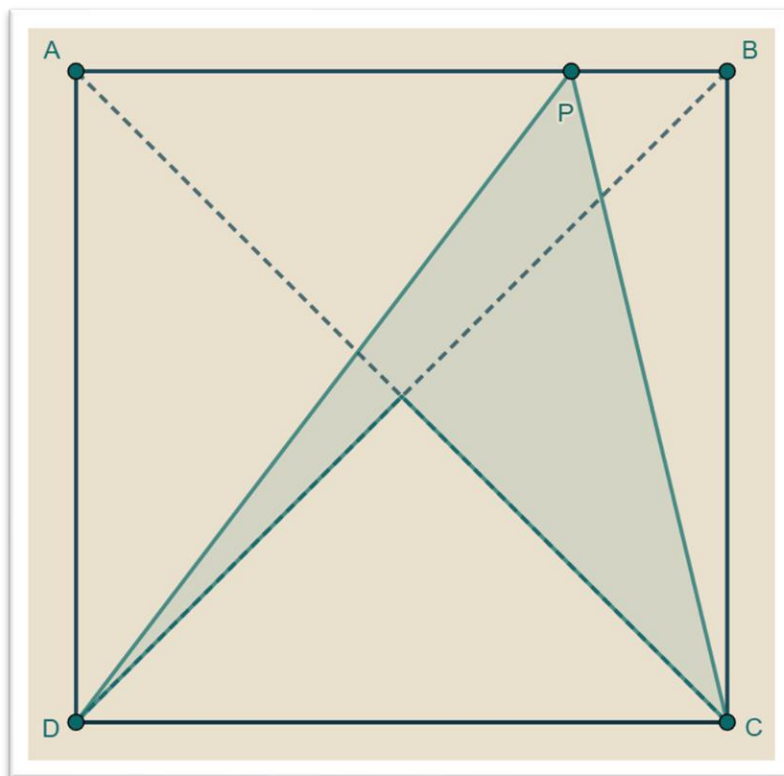
---

---

---

---

# Figuren i kvadratet



ABCD er et kvadrat. P er et vilkårligt punkt på  $|AB|$ .

Hvor stor en brøkdel udgør den grønne figur af det samlede areal? Du skal begrunde dit svar.

---

---

---

---

---

---

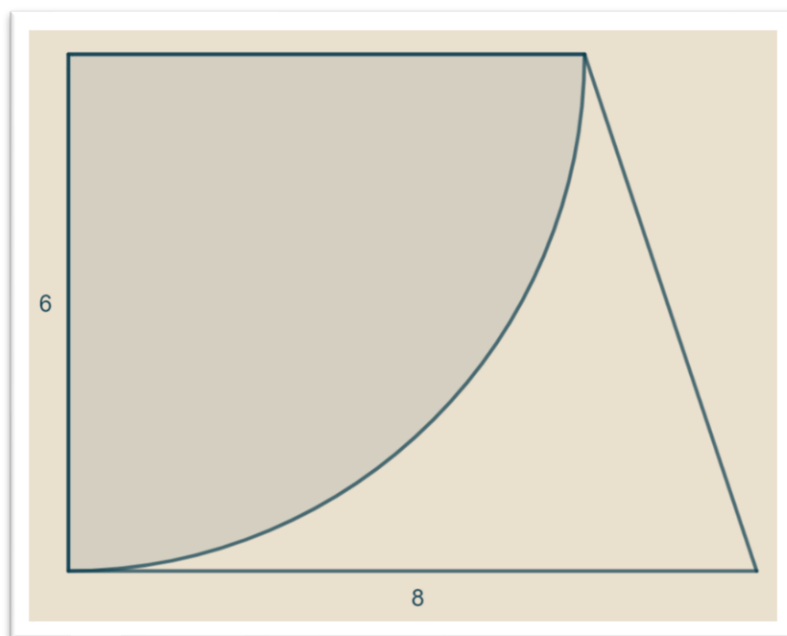
---

---

---

---

# Retvinklet trapez



Trapezet har to rette vinkler.

Hvor stort er arealet af den del af trapezet, der ikke er grønt? Du skal begrunde dit svar.

---

---

---

---

---

---

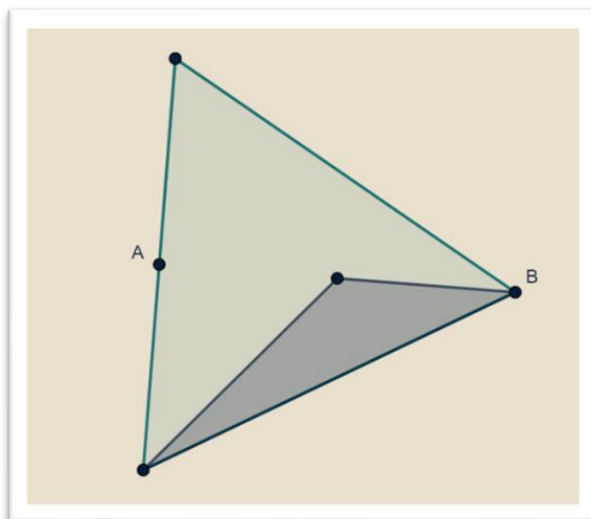
---

---



Er du gået i stå? Se arbejdsarket på [kortlink.dk/2nrw5](https://kortlink.dk/2nrw5)

# To midtpunkter



Tegn en ligesidet trekant.



Afsæt midtpunktet, A, på et linjestykke.



Afsæt midtpunktet på  $|AB|$ .



Tegn en trekant ved at forbinde de tre punkter.

Hvor stor en brøkdel udgør den mørke trekant af den ligesidede trekant?

---

---

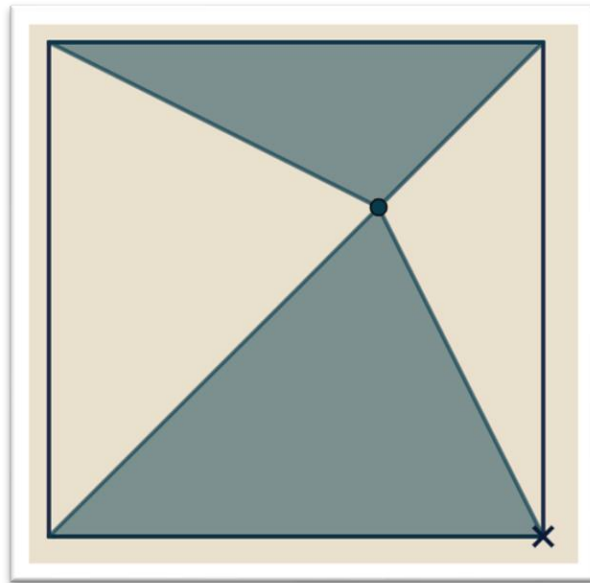
---

---

---

---

# Et punkt i et kvadrat



Tegn et kvadrat.



Afsæt et punkt indeni kvadratet.



Brug punktet til at dele kvadratet i fire trekanter.

Flyt på punktet indeni kvadratet. Hvad opdager du om arealerne af de mørke og lyse trekanter? Hvorfor gælder dette?

---

---

---

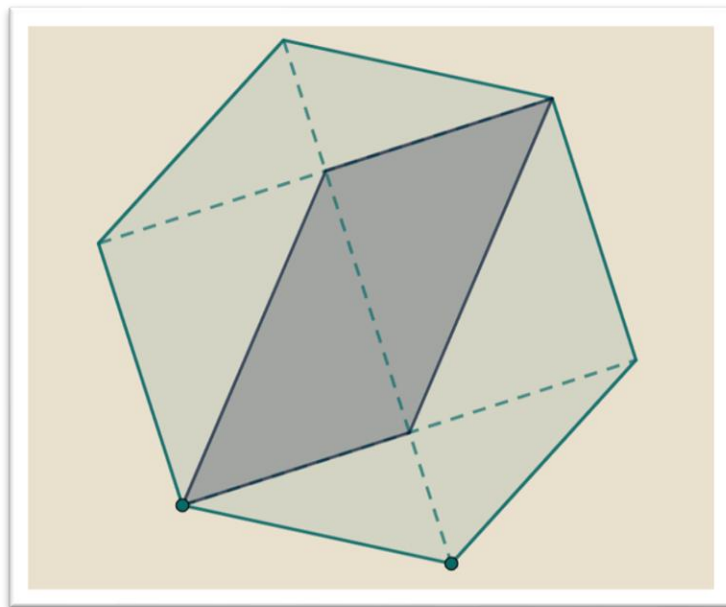
---

---

---

---

# Regulær heksagon



Tegn en regulær sekskant.



Tegn tre af sekskantens diagonaler.



Tegn et parallelogram.

Hvor stor en brøkdel af sekskanten udgør parallelogrammet?

---

---

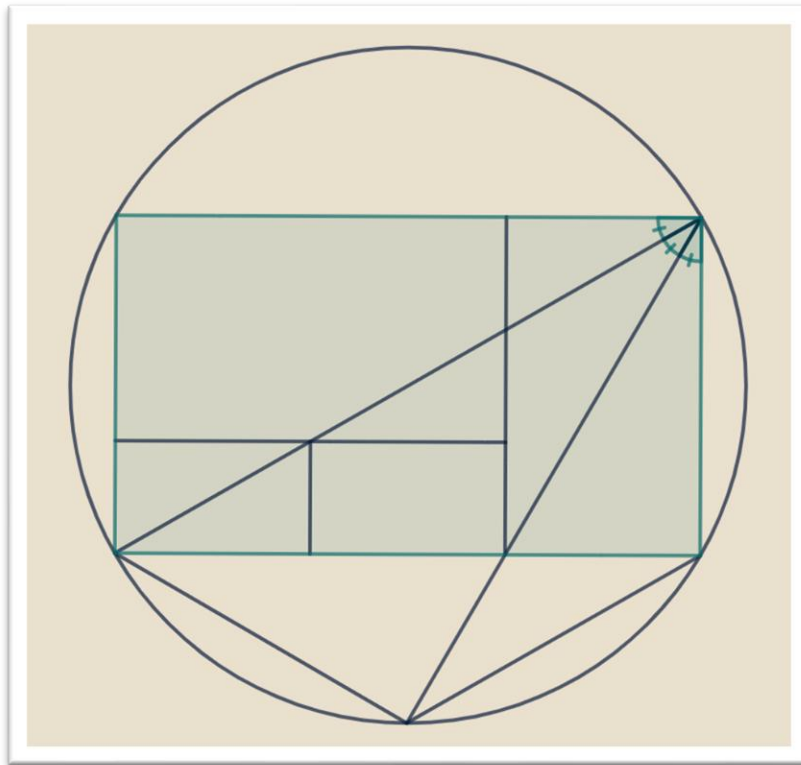
---

---

---

---

# Rektanglet

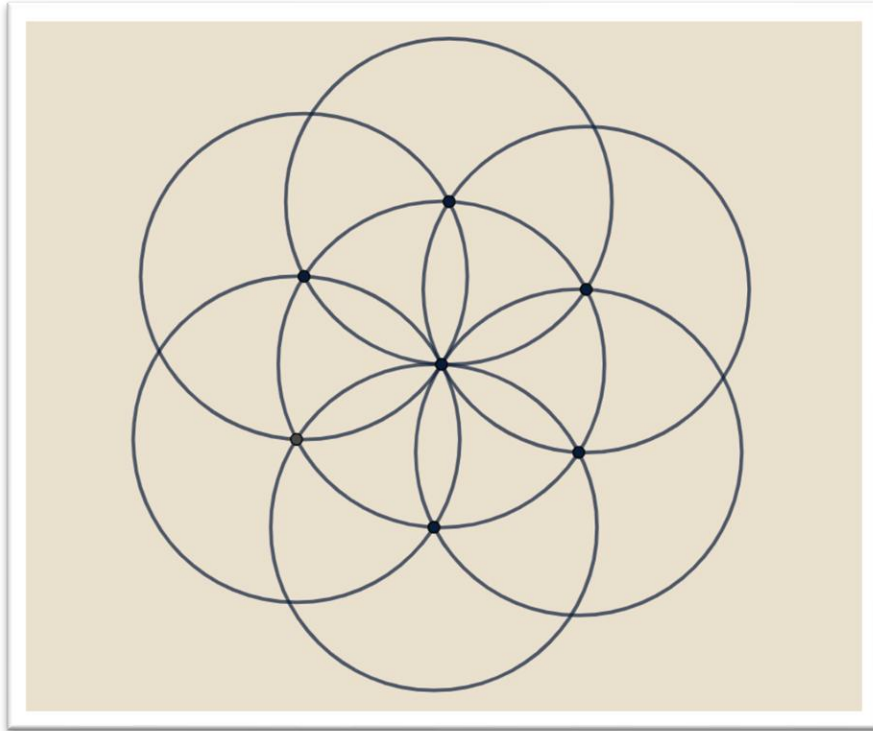


På billedet ser du et rektangel og dets omskrevne cirkel samt et antal linjestykker.

De tre markerede vinkler er lige store.

- 1) Lav konstruktionen ved hjælp af et it-værktøj. Beskriv, hvordan du lavede konstruktionen.
- 2) Hvilke figurer består konstruktionen af?
- 3) Du skal bestemme længden af linjestykkerne og størrelsen på vinklerne. Du skal bruge et it-værktøj, beregninger og matematiske forklaringer.

# Cirkeblomsten



Beskriv, hvordan cirkeblomsten konstrueret

- Hvilke figurer er brugt?
- I hvilken rækkefølge er der tegnet?

---

---

---

---

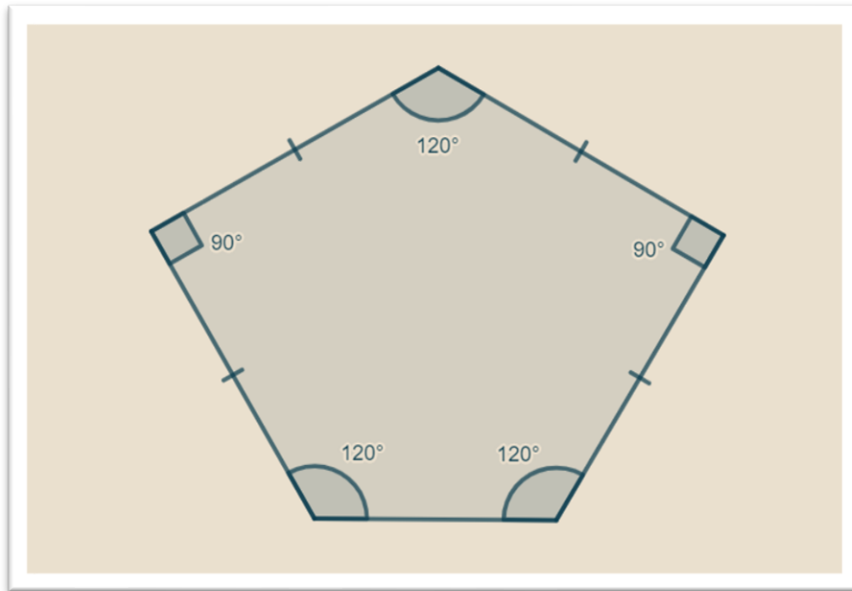
---

Du skal konstruere cirkeblomsten.



Er du gået i stå? Se arbejdsarket på [kortlink.dk/265yr](https://kortlink.dk/265yr)

# Cairo-flisen

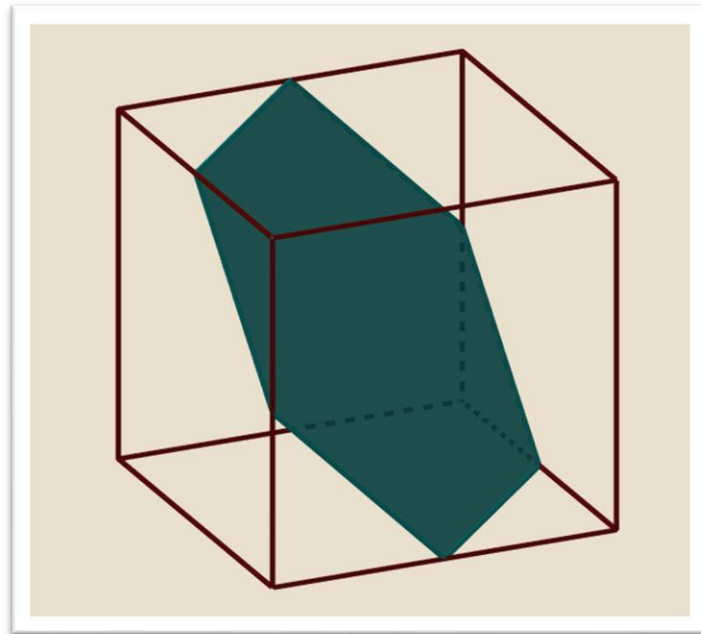


Cairo-flisen har fået sit navn, fordi flere gader i Cairo er dækket med den. Flisen er femkantet. Fire sider er lige lange, mens den femte side er kortere. Vinklerne er  $120^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  og  $90^\circ$ .

Du skal konstruere Cairo-flisen.

Derefter skal du tegne et fladedækkende mønster (tesselation) ved at spejle og dreje dit grundmotiv, Cairo-flisen.

# Hexagon Box



Åbn arbejdsarket på [kortlink.dk/25bcf](https://kortlink.dk/25bcf)

Beskriv hvordan figuren er konstrueret. Du kan skrive herunder, indtale en lydfil eller lave en skærmpoptagelse.

Prøv at konstruere figuren selv.

---

---

---

---

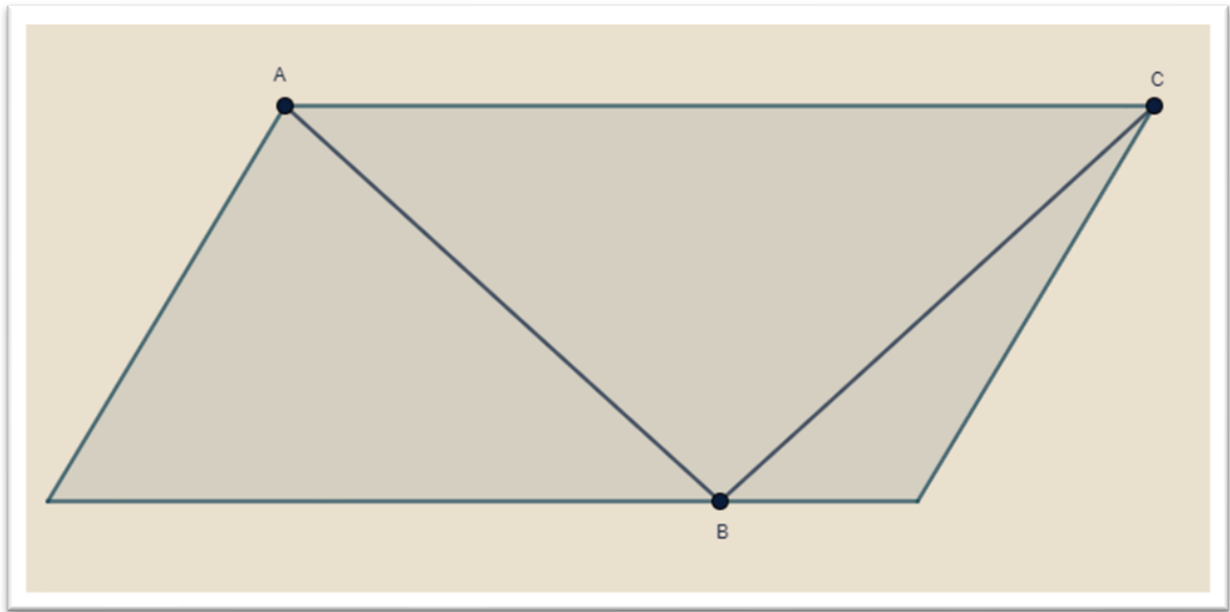
---

---

---

---

# Quiz #1



Hvilket linjestykke er længst?

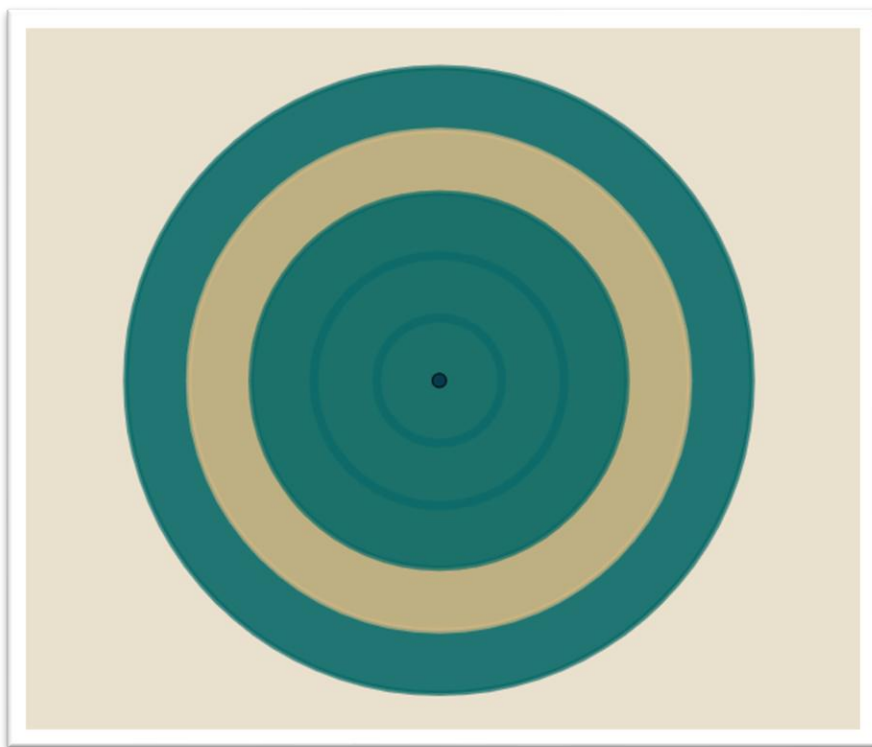
- $|AB|$
- $|BC|$
- $|AB|=|BC|$

Når du har gættet, kan du tjekke løsningen i arbejdsarket.



Åbn arbejdsarket på [kortlink.dk/25bn5](https://kortlink.dk/25bn5)

# Quiz #2



På billedet ser du fem ringe. Fra centrum er det tre blålige, derefter en brunlig og så en blålig igen. Cirklerne er tegnet sådan at radius stiger med én for hver ring. Den inderste ring har en radius på 1. Den næste 2 osv.

Hvilket af de to blålige arealer er størst? Forklar dit ræsonnement.

---

---

---

---

---



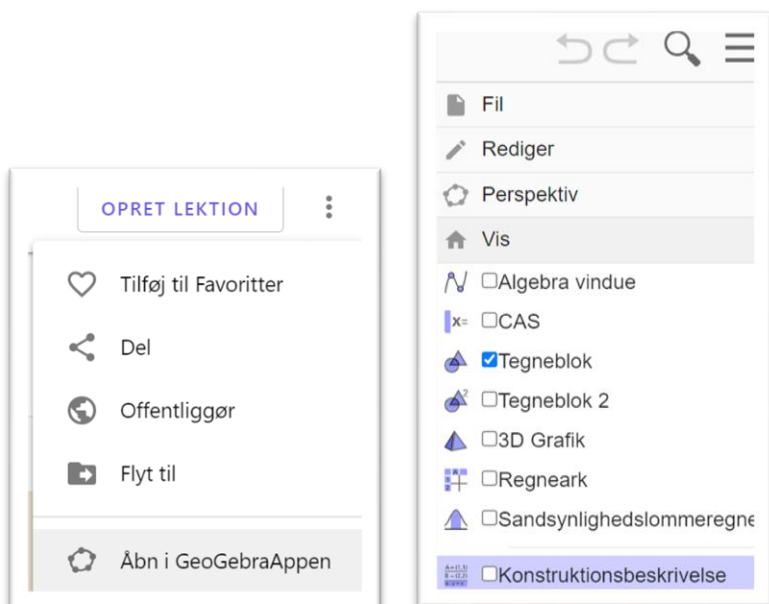
Er du gået i stå? se arbejdsarket på [kortlink.dk/25bp8](https://kortlink.dk/25bp8)

# Til læreren

Jeg har oprettet et arbejdsark til hvert oplæg, som kan bruges som facitliste for læreren. Arbejdsarkene kan også deles med eleverne, hvis fokus udelukkende ligger på ræsonnementerne og ikke konstruktionen. Alle arbejdsark er samlet i en GeoGebraBog. Du finder bogen på linket:

<https://www.geogebra.org/m/fhtebrxw>

Du kan se, hvordan hvert arbejdsark er konstrueret i konstruktionsbeskrivelsen. Klik på de tre cirkler øverst til højre og vælg *Åbn i GeoGebraAppen*. Klik på de tre vandrette linjer, vælg *Vis* og sæt et flueben i *Konstruktionsbeskrivelse*. Arbejdsarkene kan konstrueres på mange andre måder.



I oplæggene har jeg skrevet *du*, da hver elev skal konstruere på deres egen skærm. Tanken er dog, at eleverne arbejder sammen i makkerpar så de kan hjælpe hinanden med konstruktionerne og undersøge og ræsonnere i fællesskab.

På de efterfølgende sider finder du en facitliste. For egentlige beviser, skal du søge i relevante lærebøger eller på nettet.

# Facitliste

## Topvinkler

Topvinkler er lige store.

Nabovinkler har tilsammen en vinkelsum på  $180^\circ$ .

## Ens.vin v/ par.lin

Når en linje skærer to parallelle linjer, bliver de *ensliggende* vinkler lige store.

Eksempel: B og W er ensliggende vinkler.

## En delt ret vinkel

Summen af de to vinkler er  $90^\circ$ .

## En delt lige vinkel

Summen af de to vinkler er  $180^\circ$ . De er nabovinkler.

## Normaler

Eleverne bruger værktøjet "vinkelret linje". Normalen står altid vinkelret på linjen. Opgaven er en optakt til arbejdet med højder i en trekant.

## Højder i en trekant

Skæringspunktet ligger

- indeni trekanten i en spidsvinklet trekant
- på trekanten (i et hjørnepunkt) i en retvinklet trekant
- udenfor trekanten i en stumpvinklet trekant.

## Midtnormaler

Afstanden er den samme.



Du kan måle afstanden mellem to punkter uden at tegne et linjestykke mellem dem.

## Midtnormaler i en trekant

Skæringspunktet ligger

- indeni trekanten i en spidsvinklet trekant
- på trekanten i en retvinklet trekant
- udenfor trekanten i en stumpvinklet trekant.

## Trekantens omskrevne cirkel

Eleverne kan bruge deres ræsonnement fra opgaven *Midtnormaler*. Fra et punkt på en midtnormal er afstanden den samme til linjestykkets to endepunkter. Derfor må det gælde, at afstanden fra  $O$  er den samme til de tre vinkelspidser.

## Vinkelhalveringslinjer

Afstanden er den samme.

## Trekantens indskrevne cirkel

Oplægget følger efter arbejdet med oplægget "Vinkelhalveringslinjer", da trekantens indskrevne cirkel har centrum i vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt og radius  $|SD|$ .

## Medianer

Da en trekants medianer altid ligger indeni trekanten, vil deres skæringspunkt gøre det samme.

## Del med median


En median deler en trekant i to nye trekanter med ens areal.

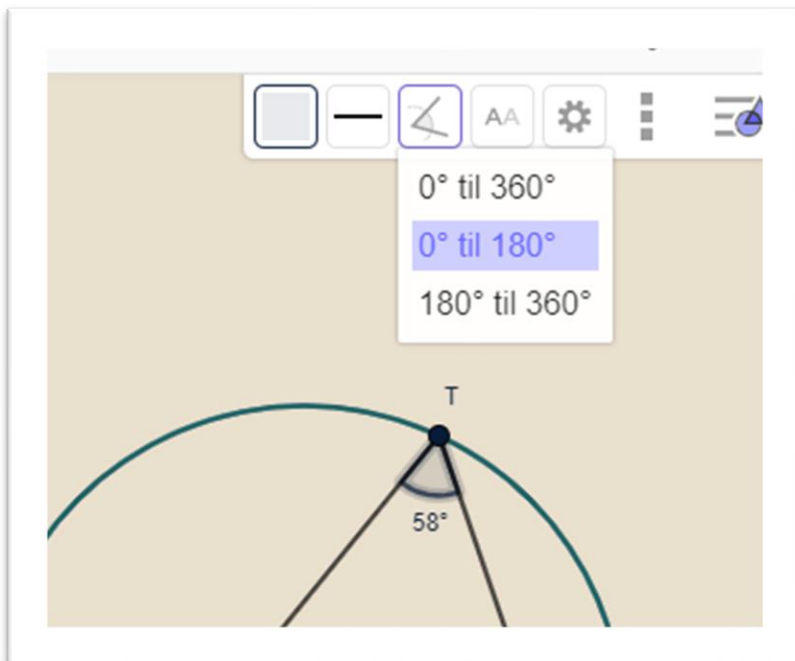
## Forholdet mellem medianer

Forholdet er 2:1.

## Vinkel i en cirkel

Vinklen er samme størrelse uanset hvor på den største cirkelbue T placeres. Hvis T er placeret på den mindste cirkelbue er  $\angle ATB = 180^\circ - \text{ATB}$ .

 Du kan sikre, at du kun får målt den indvendige vinkel ved at markere vinklen og vælge  $0^\circ$  til  $180^\circ$  fra formateringsmenuen.



## Vinkel i en halvcirkel

Vinklen vil altid være ret.

## To korder

Produkterne er lig hinanden.

## Fire cirkelbuer

Vinklen mellem korderne er  $90^\circ$ .

## To cirkler skærer hinanden

Længden af  $|PQ|$  er konstant.

## Periferivinkler

En periferivinkel er halvt så stor som den tilhørende centervinkel.

## Indvendige vinkler

Den indvendige vinkels størrelse er det halve af summen af centervinklerne.

## Udvendige vinkler

Størrelsen af den udvendige vinkel er det halve af differencen af centervinklerne.

## Tangentvinkler

Summen er  $180^\circ$ , da de to ben i centervinklen hver især står vinkelret på en tangent.

## Korde-tangentvinkler

Vinklen mellem korden og tangenten er halvt så stor som centervinklen.

## De tre tangenter

$\angle AOB$  er halvt så stor som centervinklen.

## De to øjne

De to linjestykker er lige lange.

## (Vinkler(Firkant(Cirkel)))

Summen af to modstående vinkler er  $180^\circ$ .

## Aubels sætning

De to linjestykker er lige lange og danner en ret vinkel. Eleverne kan undersøge konkave figurer også, hvor det samme gælder.



For at få tegnet kvadrater der 'vender væk' fra firkanten, skal du klikke på de to punkter mod urets retning.

## Napoleons sætning

Der fremkommer endnu en ligesidet trekant.

## Van Schootens sætning

$$|SA| = |SB| + |SC|.$$

## Vivianis sætning

Summen af afstandene fra P til hver af trekantens sider er lig med højden i den ligesidede trekant.

## Johnsons sætning

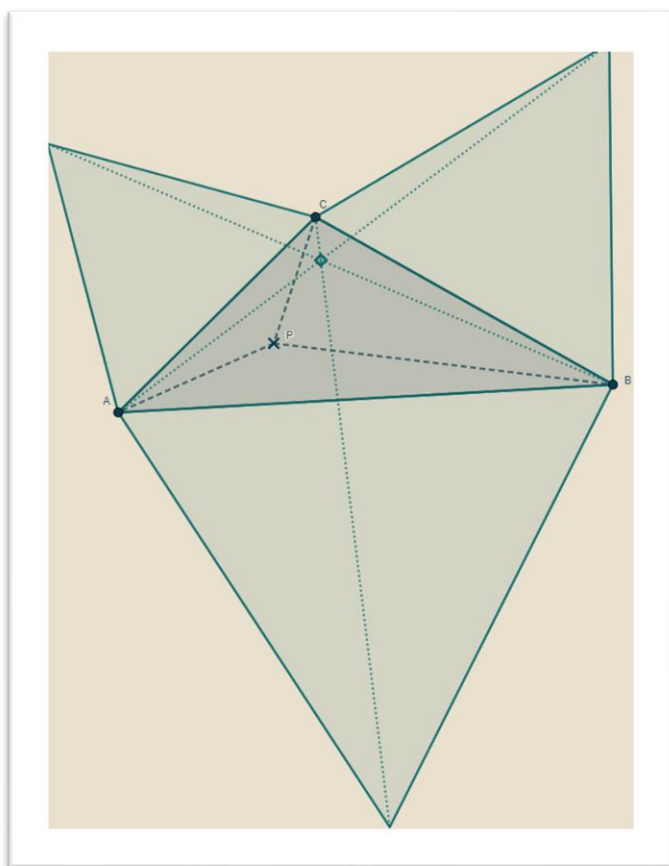
De tre skæringspunkter ligger på periferien af en ny cirkel, som er kongruent med de tre oprindelige cirkler.

Konstruktionen kan være vanskelig, da eleverne ikke alene kan bruge cirkelværktøjerne.

## Fermats punkt

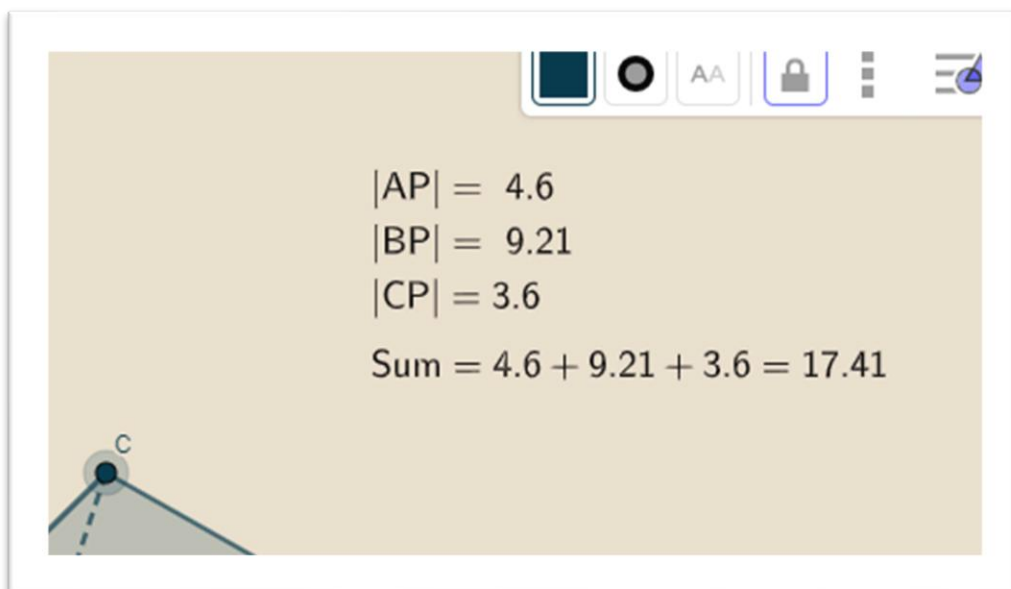
Tegn en regulær trekant på hver af den oprindelige trekants sider. Forbind hvert nyt hjørne med det modsatte hjørne på den oprindelige trekant. Disse linjestykkers skæringspunkt er løsningen. Der er næppe elever, der finder denne løsning. De vil prøve sig frem.

Eleverne kan også få præsenteret løsningen og undersøge, om den gælder for alle trekanttyper. Der ligger et arbejdsark med løsningen i GeoGebraBogen.





Punkt A, B og C er i udgangspunkt låste. De kan låses op ved at markere punktet og klikke på hængelåsen i formateringsmenuen.



## Euler

De tre skæringspunkter ligger på en linje, Euler-linjen.

$|MN|$  er det halve af  $|HM|$ .

I en ligesidet trekant ligger de tre skæringspunkter ovenpå hinanden.

## Hvorfor så firkantet?

Eleverne skal selv overveje, hvad de kan undersøge. Altså, hvilke matematiske spørgsmål kan der stilles? Eleverne kan hjælpes på vej med idéer til, hvad de kan kigge efter.

Form: Den nye firkant er altid et parallelogram.

Areal: Arealet af parallelogrammet er det halve af den oprindelige firkants.

Længde af sider og diagonaler: Summen af diagonalernes længde i den oprindelige firkant er lig med omkredsen af den nye firkant.

Eleverne kan undersøge både konvekse og konkave figurer.

## Dragen i kvadratet

Dragefirkanten udgør  $1/8$  af det samlede areal.

Kan bruges som ren konstruktionsopgave grundet sværhedsgrad.

## Andel af kvadrat

Det mørke område udgør  $\frac{2}{3}$  af kvadratet.

## Cirklen på kvadratet

Kvadratet har den største omkreds.

## De kvarte cirkler

Hvert cirkeludsnit udgør  $\frac{1}{4}$  af en hel cirkel. Cirkeludsnittenes samlede areal er altså lig med arealet af en af cirklerne.

Arealet af det lyse område:

$$8^2 - \pi \cdot 4^2 \approx 13,73452$$

Arealet i et kvadrat med sidelængden  $n$ :

$$n^2 - \pi \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 = n^2 - \frac{\pi \cdot n^2}{4} \approx 0,2146018 \cdot n^2$$

## Et kvadrat og to cirkler

$$\frac{B}{G} = \sqrt{2}$$

## Areal af cirklen

Arealet er 17,02.

## Morleys trekant

Trekanten vil altid være ligesidet.

## Forhold mellem cirkler

Forholdet mellem cirklernes radier er 2:1.

## Cirkelbuer i kvadrat

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41$$

## Linjestykke mellem cirkelbuer

$$\frac{EF}{s} = \sqrt{3} - 1 \approx 0,73$$

## Hvilken figur?

Sporet tegner en ellipse. Se en animation i arbejdsarket "Konstruer en ellipse".

## Tre kongruente rektangler

Vinkel  $v$  er  $45^\circ$ .

## Sandkassen

Vinkel  $A$  skal være  $90^\circ$ . Det sidste stykke træ skal have en længde på 4,53 meter.

## Firkanten i kvadratet

Den grønne figur udgør  $\frac{3}{8}$  af det samlede areal.

## Figuren i kvadratet

Den grønne figur udgør  $\frac{1}{4}$  af det samlede areal.

## Retvinklet trapez

Areal af trapez:  $\frac{1}{2} * 6 * (6 + 8) = 42$

Areal af kvartcirkel:  $\frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 9\pi$

Areal af ikke-grønt område:  $42 - 9\pi \approx 13,73$

## To midtpunkter

Den mørke trekant udgør  $\frac{1}{4}$  af den ligesidede trekant.

## Et punkt i et kvadrat

Arealerne er lige store. Eleverne kan bruge gitteret i deres forklaring. Se de to hints i arbejdsarket.

## Regulær heksagon

Parallelogrammet udgør  $\frac{1}{3}$  af den regulære sekskant.

## Rektanglet

Oplægget kan bruges til teknisk træning i konstruktion af robuste figurer.

Det kan også bruges som oplæg til en mundtlig aktivitet med fokus på geometriske ræsonnementer i stil med den tidligere eksempelprøve "Tages kvadrat". Eleverne viser hjælpemiddelkompetence ved bevidst at vælge et godt digitalt værktøj til konstruktionen (GeoGebra).

## Cirkeblomsten

Klik "Play" for at se en animation af konstruktionen i arbejdsarket i GeoGebraBogen.

## Cairo-flisen

Cairo-flisen kan konstrueres på flere måder.

Forbindes midtpunktet med midtpunkterne i de tilstødende fliser opstår en semiregulær tessellation af kvadrater og ligesidede trekanter. Se eksemplet i GeoGebraBogen.

## Hexagon Box

Eleverne beskriver konstruktionen. Bruger eleverne et præcist fagsprog?

## Quiz #1

De to linjestykker er lige lange.

## Quiz #2

De to arealer er lige store. Arealet af de inderste cirkler er  $\pi \cdot 3^2$ .  
Arealet af den yderste ring er  $\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 4^2 = \pi \cdot 3^2$ .